Elément de cours des exercices

Majoration des restes de séries

Lorsqu'une série de terme général u_n est convergente, on note R_n son reste d'ordre n :

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k.$$

1 Majoration de $|R_n|$ dans le cas des séries alternées

THÉORÈME. Une série alternée, dont la valeur absolue du terme général u_n décroît et tend vers 0, converge et on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$:
a) $|R_n \leqslant |u_{n+1}|$;
b) la somme S de la série est encadrée par deux sommes partielles consécutives quelconques S_n et S_{n+1}.

EXEMPLE. Pour la série $\sum \dfrac{(-1)^{n+1}}{n}$ avec $n \geqslant 1$, on a $|R_n| \leqslant \dfrac{1}{n+1}$ et $S_{2n} < S < S_{2n+1}$.

2 Cas des séries à termes positifs (ou des séries absolument convergentes)

2.1 Comparaison série-intégrale

Soit f une fonction numérique définie et continue sur $[0, +\infty[$ (ou à partir d'un $a > 0$) positive, décroissante et telle que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$. La série de terme général $f(n)$ converge si et seulement si $\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}\,t$ admet une limite quand x tend vers $+\infty$ et l'on a alors :

$$\int_{n+1}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}\,t \leqslant R_n \leqslant \int_n^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}\,t.$$

Cet encadrement résulte de la sommation des inégalités, pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$f(k+1) \leqslant \int_k^{k+1} f(t)\,\mathrm{d}\,t \leqslant f(k).$$

EXEMPLE. Pour la série de terme général $\dfrac{1}{n^2}$, $n \geqslant 1$, avec la fonction $\dfrac{1}{x^2}$, on a :

$$\int_{n+1}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}\,x}{x^2} \leqslant R_n \leqslant \int_n^{+\infty} \frac{\mathrm{d}\,x}{x^2},$$

soit

$$\frac{1}{n+1} \leqslant R_n \leqslant \frac{1}{n}.$$

2.2 Séries relevant de la règle de Cauchy

Soit u_n le terme général d'une série à termes positifs telle que la suite $(\sqrt[n]{n})$ ait une limite λ strictement inférieure à 1. La série est convergente et, en prenant un k tel que $\lambda < k < 1$, il existe un entier n_0 tel que, pour tout $n \geqslant n_0$, on ait $\sqrt[n]{n} \leqslant k$, donc $u_n \leqslant k^n$.
Pour tout $n \geqslant n_0$, on peut donc majorer les termes du reste d'ordre n par les termes d'une série géométrique de raison k, c'est-à-dire :

$$R_n \leqslant \sum_{p=n+1}^{+\infty} k^p = \frac{k^{n+1}}{1-k}.$$

Exemple. Soit $u_n = \dfrac{1}{n^n}$. Pour tout $p > n$, on a $u_p \leqslant \dfrac{1}{(n+1)^p}$, d'où

$$R_n \leqslant \sum_{p=n+1}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)^p} = \frac{1}{(n+1)^{n+1}} \times \frac{1}{1-1/(n+1)}$$

soit

$$R_n \leqslant \frac{1}{n(n+1)^n}.$$

2.3 Séries relevant de la règle de d'Alembert

Soit u_n le terme général d'une série à termes strictement positifs telle que la suite $(\dfrac{u_{n+1}}{u_n})$ ait une limite λ strictement inférieure à 1. La série est convergente et, en prenant un k tel que $\lambda < k < 1$, il existe un entier n_0 tel que, pour tout $n \geqslant n_0$, on ait

$$u_{n+1} \leqslant k u_n.$$

On en déduit que, pour tout $p \geqslant 1$, on a

$$u_{n+p} \leqslant k^p u_n.$$

Pour tout $n \geqslant n_0$, on peut donc majorer les termes du reste d'ordre n par les termes d'une série géométrique de raison k et :

$$R_n \leqslant u_n \sum_{p=1}^{+\infty} k^p$$

soit

$$R_n \leqslant \frac{k u_n}{1-k}.$$