Méthodes et techniques des exercices

Primitives de $P(x)\sin(x)$

Quand une fonction f s'écrit sous la forme $f(x) = P(x)\sin(x)$, où P est une fonction polynômiale, on calcule une primitive de f sur $\mathbb{R}$ par une intégration par parties en dérivant le polynôme.

$$\text{On pose } \left\{\begin{array}{rcl} u(x) & = & P(x) \\ v'(x) & = & \sin(x) \end{array}\right.$$

$$\text{et on obtient } \left\{\begin{array}{rcl} u'(x) & = & P'(x) \\ v(x) & = & -\cos(x) \end{array}\right.$$

Les fonctions u et v ainsi définies sont bien continûment dérivables sur $\mathbb{R}$. On peut donc appliquer la méthode d'intégration par parties et on a :

$$\int P(x)\sin(x)\,\mathrm{d}x = -\cos(x)P(x) + \int P'(x)\cos(x)\,\mathrm{d}x$$

On se ramène donc au calcul d'une primitive d'une fonction qui est le produit d'un polynôme de degré strictement plus petit que celui de P et de la fonction cosinus.
Si P' est de degré zéro, alors on sait calculer une primitive de $x \mapsto P'(x)\cos(x)$.
Sinon, on fait une nouvelle intégration par parties en dérivant P'. On aboutit alors au calcul d'une primitive de $x \mapsto P''(x)\sin(x)$, c'est-à-dire qu'on a encore baissé le degré du polynôme.
On recommence alors à faire des intégrations par parties en choisissant à chaque fois de dériver le polynôme jusqu'à obtenir un polynôme constant.

Remarque. Tout ce qui précède s'applique aussi aux fonctions de la forme $P(x)\cos(x)$, $P(x)\sinh(x)$ et $P(x)\cosh(x)$. Le calcul d'une primitive se fait en utilisant des intégrations par parties où on dérive le polynôme.

Exemple. Pour rechercher une primitive de la fonction $x \mapsto f(x) = x^2\sin(x)$, on fait une intégration par parties en posant

$$\left\{\begin{array}{rcl} u(x) & = & x^2 \\ v'(x) & = & \sin(x) \end{array}\right. \quad \text{et} \quad \left\{\begin{array}{rcl} u'(x) & = & 2x \\ v(x) & = & -\cos(x) \end{array}\right.$$

Les fonctions u et v ainsi définies sont bien continûment dérivables et on a :

$$\int x^2\sin(x)\,\mathrm{d}x = -x^2\cos(x) + 2\int x\cos(x)\,\mathrm{d}x$$

Pour calculer une primitive de $x \mapsto x\cos(x)$, on fait à nouveau une intégration par parties en posant :

$$\left\{\begin{array}{rcl} u(x) & = & x \\ v'(x) & = & \cos(x) \end{array}\right. \qquad \text{et} \qquad \left\{\begin{array}{rcl} u'(x) & = & x \\ v(x) & = & \sin(x) \end{array}\right.$$

Les fonctions u et v ainsi définies sont bien continûment dérivables et on a :

$$\begin{array}{rcl} \int x\cos(x)\,\mathrm{d}x & = & x\sin(x) - \int \sin(x)\,\mathrm{d}x \\ & = & x\sin(x) + \cos(x) \end{array}$$

Finalement, on a trouvé qu'une primitive de $x \mapsto x^2\sin(x)$ est

$$x \mapsto -x^2\cos(x) + 2x\sin(x) + 2\cos(x).$$

Remarque.

La méthode décrite ci-dessus montre aussi qu'une primitive de $x \mapsto P(x)\sin(x)$, où P est un polynôme de degré n, peut s'écrire sous la forme

$$F(x) = a_n x^n \cos(x) + a_{n-1}x^{n-1}\sin(x) + a_{n-2}x^{n-2}\cos(x) + \cdots$$

Dans le cas de cet exercice, on peut donc affirmer qu'une primitive de f peut s'écrire :

$$F(x) = ax^2\cos(x) + bx\sin(x) + c\cos(x)$$

On utilise ensuite l'égalité $F' = f$ pour identifier les coefficients a, b et c.