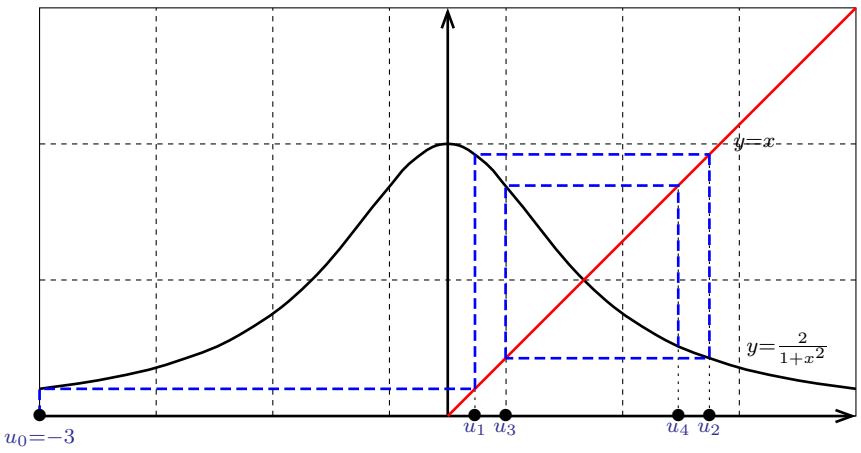
Méthodes et techniques des exercices

Dessiner un escargot

Pour une suite définie par $u_{n+1} = f(u_n)$, où f est une fonction continue, les points fixes de f sont des candidats limites. Soit ℓ tel que $\ell = f(\ell)$, un de ces candidats et supposons que, dans un voisinage de ℓ, f soit **décroissante**.

Si on suppose que les termes de la suite u_n sont dans ce voisinage, ils prennent successivement des valeurs supérieures et inférieures à ℓ. Sur le graphique représentant la fonction f et la droite $y = x$ les traits qui permettent de construire les éléments successifs de la suite s'enroulent en forme d'escargot.



Dans cette situation il est naturel d'examiner séparément la suite des termes de rang pair et la suite des termes de rang impair.
Il suffit de connaitre les positions relatives de u_0 et u_2 pour démontrer par récurrence, en utilisant la décroissance de f, la monotonie des suites des termes de rang pair et impair. Par exemple : Si on sait que $u_0 < u_2 < \ell$ la décroissance de f permet de montrer par récurrence la croissance de u_{2n} et la décroissance de u_{2n+1}. Sur

l'exemple du dessin on initialisera la récurrence par $u_1 < u_3 < \ell$.

Pour obtenir la convergence de la suite u_n, il faut d'abord montrer que les suites u_{2n} et u_{2n+1} convergent vers la même limite. Une manière naturelle d'aboutir à ce résultat est de passer à la limite dans les égalités : $u_{2n+1} = f(u_{2n})$ et $u_{2n+2} = f(u_{2n+1})$.

Pour montrer la convergence de u_n à partir de celle de u_{2n} et u_{2n+1} vers la même limite, il est nécessaire de revenir à la définition de la convergence avec ε.