Méthodes et techniques des exercices

Utiliser une hypothèse de la forme $\exists x,\ P(x)$

Nommer un objet

	Pour démontrer une proposition **Q** en utilisant une donnée de la forme $(\exists x \in E,\ \mathbf{P}(x))$:
1)	on choisit une lettre x_0 par exemple, qui n'a pas été déjà utilisée et surtout qui n'apparaît pas dans la proposition **Q** ;
2)	on ajoute aux hypothèses la proposition $(x_0 \in E$ et $\mathbf{P}(x_0))$;
3)	on démontre **Q**.

En pratique, les points 1 et 2 sont traduits par une expression de la forme

« Soit x_0 un élément de E tel que $\mathbf{P}(x_0)$ »
ou
« On sait que $(\exists x \in E,\ \mathbf{P}(x))$; soit x_0 un tel élément ».

Il est souvent bon de justifier le « On sait que » par la référence à une définition ou à un théorème.

Exemple Soit a un réel. Montrer que si $([0,1] \cap [a-1/2, a+1/2] \neq \emptyset)$, alors $-1/2 \leq a \leq 3/2$.

Démonstration

Soit $E = [0,1] \cap [a-1/2, a+1/2]$. On suppose que E est non vide. Soit x_0 un élément de cet ensemble. On a donc $0 \leq x_0 \leq 1$ et $a - 1/2 \leq x_0 \leq a + 1/2$, d'où $0 \leq x_0 \leq a + 1/2$ et $a - 1/2 \leq x_0 \leq 1$. On en déduit $0 \leq a + 1/2$ et $a - 1/2 \leq 1$, d'où $-1/2 \leq a \leq 3/2$. On a bien le résultat demandé.

Commentaires

Dire que E est non vide, c'est dire $(\exists x \in E)$. On utilise la règle « nommer un objet » en considérant l'un des éléments de E (il peut y en avoir beaucoup) et en l'appelant x_0. Les inégalités vérifiées par x_0 permettent de trouver des inégalités concernant a.