Méthodes et techniques des exercices

# Raisonner par récurrence

Dans une démonstration, on peut être amené à démontrer une propriété $H_n$ qui dépend d'un entier $n$, c'est-à-dire en fait, à démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}, H_n$. L'une des manières de procéder est de faire un raisonnement par récurrence. Il est indispensable de respecter les points suivants :

- **Expliciter et nommer** $H_n$ : on précise clairement la propriété $H_n$ que l'on veut démontrer (ce choix est important car un mauvais choix peut rendre la démonstration difficile, voire impossible).
- Bien vérifier **l'initialisation** : on démontre $H_0$
- Montrer l'**hérédité** : on considère un entier positif $p$ quelconque et on démontre que $H_p \Rightarrow H_{p+1}$. Concrètement cette partie commence par des expressions du type "Soit $p$ un entier positif ; supposons $H_p$ et démontrons $H_{p+1}$", ou encore : "soit $p \in \mathbb{N}$ tel que $H_p$ ; démontrons $H_{p+1}$" .
- Ne pas oublier la **conclusion** : on a alors montré que $\forall n \in \mathbb{N}, H_n$.

Remarques.

- Le raisonnement par récurrence s'étend à des propriétés qui sont vraies à partir d'un certain rang $n_0$. Dans ce cas on démontre $H_{n_0}$ ; puis, pour $p \geqslant n_0$, on démontre $H_p \Rightarrow H_{p+1}$. La conclusion est alors : $(\forall n \geqslant n_0)(H_n)$.
- Si $H_n$ ne semble pas suffire pour démontrer $H_{n+1}$, penser à la récurrence forte.