Méthodes et techniques des exercices

Raisonner par récurrence forte

Lorsque l'on souhaite démontrer une propriété H_n par récurrence sur l'entier n, il arrive qu'il ne soit pas suffisant de supposer H_n pour démontrer H_{n+1}. On utilise alors la méthode suivante appelée raisonnement par récurrence forte : on choisit comme nouvelle hypothèse de récurrence

$$K_n : \forall k \leq n, H_k.$$

Comme pour une démonstration par récurrence classique (dite "faible"), il est indispensable de respecter les points suivants :
- **Expliciter et nommer** la propriété H_n que l'on veut démontrer (ce choix est important car un mauvais choix peut rendre la démonstration difficile, voire impossible).
- Affirmer clairement que l'on choisit la nouvelle hypothèse de récurrence

$$K_n : \forall k \leq n, H_k.$$

- Bien vérifier **l'initialisation** en démontrant H_0.
- Montrer l'**hérédité** : on considère un entier positif n quelconque et on suppose que K_n est vraie, et on démontre alors H_{n+1}.
- Ne pas oublier la **conclusion** : on a alors montré que $\forall n \in \mathbb{N}, H_n$.

Exemple. Pour un entier $n \geq 2$, on souhaite montrer la propriété H_n suivante :

"Un entier n positif admet un diviseur premier".

- Pour l'initialisation à $n = 2$, pas de problème : 2 admet 2 comme diviseur premier.
- Soit $n \geq 2$ un entier. On suppose que tous les entiers $2 \leq k \leq n$ admettent un diviseur premier. Si $n+1$ est premier, alors H_{n+1} est vérifiée ($n+1$ est son propre diviseur premier), sinon $n+1$ n'est pas premier et il admet alors un diviseur r, avec $2 \leq r \leq n$. D'après l'hypothèse de récurrence, l'entier r admet un diviseur premier qui est alors également un diviseur de $n+1$.
  On a donc montré que tout entier n admet un diviseur premier.