Méthodes et techniques des exercices

Montrer $P \Longrightarrow Q$

Méthode de l'hypothèse auxiliaire

Beaucoup d'énoncés sont du type « Montrer que si l'on a **P**, alors on a **Q** », c'est-à-dire « démontrer (**P** $\Longrightarrow$ **Q**) ».
Dans la pratique, on commence souvent en écrivant « on suppose **P** », c'est-à-dire que l'on considère **P** comme une nouvelle donnée, puis on cherche à démontrer **Q**. La démonstration s'achève par une phrase du genre « on a montré **Q** » et il peut être bon de prendre la peine de rappeler la conclusion globale « on a montré (**P** $\Longrightarrow$ **Q**) ».
On peut expliciter cette démarche par la règle suivante :

Pour démontrer (**P** $\Longrightarrow$ **Q**) :
1. on ajoute **P** aux données.
2. on démontre que **Q** est vraie.

Exemple

Soit n un entier. Montrer que si n est pair, alors n^2 est pair.

Démonstration

On suppose que n est pair.
Par définition d'un nombre pair, on peut donc écrire $n = 2k$ où k est un entier. On en déduit $n^2 = 4k^2$, donc $n^2 = 2k'$ où $k' = 2k^2$. Donc n^2 est pair.
On a montré que si n est pair, alors n^2 l'est aussi.

Commentaires

Soient **P** la proposition « n est pair » et **Q** la proposition « n^2 est pair ». La proposition à démontrer est « si **P**, alors **Q** », c'est-à-dire (**P** $\Longrightarrow$ **Q**).
La première ligne de la démonstration revient à ajouter **P** aux données, le deuxième paragraphe démontre **Q**, le troisième est la conclusion.