Méthodes et techniques des exercices

Montrer $\forall x, P(x)$

Règle du "quel que soit"

On veut montrer une proposition du type $(\forall x \in E,\ \mathbf{P}(x))$.
Dans la pratique, on commence en écrivant une expression du style « Soit x un élément de E », ou « Considérons un élément x de E », puis on écrit une démonstration de $\mathbf{P}(x)$.
Lorsque cette démonstration est un peu longue, on peut l'encadrer par l'annonce « On va montrer qu'on a $\mathbf{P}(x)$ » et la conclusion partielle « On a montré $\mathbf{P}(x)$ ». On peut ajouter la conclusion globale « On a montré $(\forall x \in E,\ \mathbf{P}(x))$ ».

Cette démarche peut être explicitée par la règle suivante :

Pour démontrer $(\forall x \in E,\ \mathbf{P}(x))$:

1. on choisit une lettre x qui n'a pas déjà été utilisée ailleurs et on ajoute la donnée $x \in E$;
2. on démontre que $\mathbf{P}(x)$ est vraie.

Exemple
Montrer que pour tout x de $\mathbb{R}$, on a $(x > 1 \Longrightarrow x^2 + x + 1 > 3)$.
Démonstration
Soit x un nombre réel.
Supposons $x > 1$. On a alors $x^2 > 1$. On en déduit $x^2 + x + 1 > 1 + 1 + 1$, c'est -à-dire $x^2 + x + 1 > 3$.
On a bien le résultat.
Commentaires
Ici $\mathbf{P}(x)$ est la proposition $(x > 1 \Longrightarrow x^2 + x + 1 > 3)$. Le premier alinea correspond au point 1. La proposition $\mathbf{P}(x)$ est une implication de la forme $(\mathbf{P_1} \Longrightarrow \mathbf{Q_1})$. Pour la démontrer, on utilise la règle de l'hypothèse auxiliaire (LIEN), en ajoutant $\mathbf{P_1}$ aux données (on a écrit « Supposons que l'on a $x > 1$ ») et on démontre $\mathbf{Q_1}$. Les deux premières phrases reviennent à ajouter les données « x réel » et « $x > 1$ ». On aurait pu les condenser en écrivant « Soit x un réel tel que $x > 1$ ».