Elément de cours des exercices

Qu'est-ce qu'une démonstration

Deuxième exemple : Théorème de Steiner
Un triangle qui a deux bissectrices de longueurs égales est isocèle.
Démonstration
Supposons que dans le triangle ABC les bissectrices issues de B et de C soient de longueurs égales. Si le triangle n'était pas isocèle, l'un des angles $\widehat{B}$ ou $\widehat{C}$ serait plus grand que l'autre ; par exemple, $\hat{C}$ serait plus grand que $\widehat{B}$. Soit $[BM]$ et $[CN]$ les bissectrices des angles $\widehat{B}$ et $\widehat{C}$. Nous allons montrer que $CN < BM$, ce qui est contraire à l'hypothèse.
Soit M' le point de $[BM]$ tel que $\widehat{M'CN} = \frac{1}{2}\widehat{B}$. Cet angle est égal à $\widehat{M'BN}$; il s'ensuit que les quatre points N, B, C et M' sont situés sur un même cercle. Et, puisque $\widehat{B} < \frac{1}{2}(\widehat{B}+\widehat{C}) < \frac{1}{2}(\widehat{A}+\widehat{B}+\widehat{C})$, on a $\widehat{CBN} < \widehat{M'CB} < \frac{\pi}{2}$.
Or, si dans un cercle deux cordes sous-tendent des angles inscrits aigus et inégaux, le plus petit angle correspond à la plus petite corde. Donc $CN < BM'$.
Il en résulte donc : $CN < BM' < BM$.

Des démarches essentielles

Des pas de démonstration

Il s'agit, $P(x)$ désignant une propriété d'un objet x, ayant déjà démontré $P(a)$ et connaissant le théorème $(\forall x, P(x) \Longrightarrow Q(x))$, d'en déduire $Q(a)$.
Par exemple, on a démontré que $\widehat{M'BN} = \widehat{M'CN}$, on a le théorème, pour tout X, Y, Z et T, si $\widehat{XYZ} = \widehat{XTZ}$, X, Y, Z et T sont sur un même cercle. On en déduit que M', B, C et N sont sur un même cercle.

Un raisonnement par l'absurde (cf la méthode)

On veut démontrer P. Pour cela on ajoute (non P) aux hypothèses et on démontre que l'on aboutit à une contradiction.
C'est le cas quand, pour montrer que le triangle est isocèle, on dit : "si le triangle n'était pas isocèle". On aboutit à la contradiction qu'on a à la fois $CN < BM$ et $CN = BM$.

La méthode des cas (cf la méthode)

Si on dispose d'une hypothèse de la forme (P ou Q) et qu'on veut montrer R, on examine deux cas : dans la premier cas on admet P et on démontre R, dans le deuxième cas on admet Q et on démontre R.
Ici, on sait que $\widehat{B} < \widehat{C}$ ou $\widehat{C} < \widehat{B}$. On examine le cas $\widehat{B} < \widehat{C}$ et on démontre une contradiction. Le cas $\widehat{C} < \widehat{B}$ est sous-entendu, car il est identique au cas précédent, en intervertissant les rôles de $\widehat{B}$ et $\widehat{C}$.

L'hypothèse auxiliaire (voir la méthode)

Voulant montrer $(P \Longrightarrow Q)$, on ajoute P aux hypothèses et on démontre Q. Dans

la démonstration précédente, on veut montrer que "si dans le triangle ABC, les deux bissectrices des angles $\widehat{B}$ et $\widehat{C}$ sont égales, alors $\widehat{B} = \widehat{C}$. Pour le faire, on ajoute aux hypothèses que les deux bissectrices sont égales et on démontre que $\widehat{B} = \widehat{C}$.

Généralisation (voir la méthode)
Voulant démontrer une propriété de la forme $(\forall x \in E, P(x))$, on choisit une lettre qui n'a pas encore été utilisée pour désigner un élément de E, par exemple a, et on démontre $P(a)$. Ainsi, dans notre démonstration, on veut démontrer que si, dans un triangle, les deux bissectrices ont des longueurs égales, ce triangle est isocèle ; pour cela on désigne par ABC un triangle dont les bissectrices ont des longueurs égales et on montre que ABC est isocèle.

Choisir un nom d'objet (voir la méthode)
Quand on sait qu'il existe un ou plusieurs objets possédant une propriété, on peut donner un nom à l'un de ces objets. On sait par exemple que dans le triangle ABC, les bissectrices existent. On décide de les nommer (BM) et (CN).

Beaucoup de liberté

Dans la pratique, on a beaucoup de liberté dans l'écriture d'une démonstration.

Des sous-entendus
Le deuxième cas "$\widehat{B}$ plus grand que $\widehat{C}$" est entièrement sous-entendu. La fin du raisonnement par l'absurde est presque sous-entendue. Les dispositions relatives des demi-droites $[CN)$, $[CM')$ et $[CA)$ ne sont pas précisées ; elles sont pourtant essentielles puisque si $[CN)$ est entre $[CM')$ et $[CA)$, la suite du raisonnement est fausse.
Ce sous-entendu s'explique par le contexte : cette démonstration a été rédigée dans les années 1950, et, à cette époque, on était moins attentif à préciser l'orientation des angles.

L'ordre de l'argumentation
On peut annoncer un résultat que l'on va démontrer : $CN < BM$.
On aurait pu remplacer la phrase "et, puisque $\widehat{B} < \frac{1}{2}(\widehat{B} + \widehat{C}) < \frac{1}{2}(\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C})$, on a $\widehat{CBN} < \widehat{M'CB} < \frac{\pi}{2}$" par "et on a $\widehat{CBN} < \widehat{M'CB} < \frac{\pi}{2}$, car $\widehat{B} < \frac{1}{2}(\widehat{B} + \widehat{C}) < \frac{1}{2}(\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C})$".

Les mots de liaison
"Supposons que, dans le triangle ABC, les bissectrices issues de B et C soient égales" pourrait être remplacé par "Soit un triangle ABC dans lequel les bissectrices de $\widehat{B}$ et de $\widehat{C}$ sont égales".

Autres exemples :
– En arithmétique : la suite des nombres premiers est illimitée.
– En analyse : l'unicité de la limite en un point d'une fonction.