Elément de cours des exercices

Qu'est-ce qu'une démonstration

Troisième exemple : La suite des nombres premiers est illimitée.

Démonstration

Supposons qu'il y ait un entier n plus grand que tout nombre premier et démontrons que l'on aboutit à une contradiction.

Considérons le nombre $a = n! + 1$. On a évidemment $a > 1$.

- si a était premier, il existerait un premier plus grand que n, ce qui est impossible.
- si a n'était pas premier, il posséderait un diviseur premier $p \neq 1$. p serait plus petit que n, donc diviserait $n!$. Des deux relations : p divise a et p divise $n!$, on déduirait : p divise $a - n! = 1$. Contradiction.

Des démarches essentielles

Des pas de démonstration

C'est la démarche la plus fréquente : $P(x)$ et $Q(x)$ étant des propriétés d'un élément x appartenant à un ensemble E et a un élément de E, et connaissant les résultats $P(a)$ et $\forall x \in E, P(x) \Longrightarrow Q(x)$, il s'agit d'en déduire $Q(a)$. Par exemple, dans la démonstration ci-dessus, on sait que tout nombre entier plus grand que 1 possède un diviseur premier et que $a > 1$ et on en déduit que a possède un diviseur premier ; E est ici $\mathbb{N}$, $P(x)$ est $x > 1$ et $Q(x)$ est " x possède un diviseur premier ".

Un raisonnement par l'absurde (cf la méthode)

On veut démontrer P. Pour cela, on ajoute (non P) aux hypothèses et on démontre que l'on aboutit à une contradiction.

Dans notre cas, on veut démontrer que la suite des nombres premiers est illimitée. Il faut d'abord comprendre ce que cela veut dire ; une manière de l'exprimer est : " pour tout entier n, il y a un nombre premier plus grand que n". Le début de notre démonstration consiste à ajouter aux hypothèses la négation de cette proposition : " il y a un nombre n plus grand que tous les nombres premiers ". Puis on démontre que l'on aboutit à une contradiction.

La méthode des cas (cf la méthode)

Si on dispose d'une hypothèse de la forme (P ou Q) et qu'on veut démontrer R, on examine deux cas : dans le premier cas, on admet P et on démontre R et dans le deuxième cas on admet Q et on démontre R.

Ainsi, dans notre démonstration, on sait que p est premier ou p n'est pas premier. On examine donc les deux cas. Comme dans chacun des cas on aboutit à une contradiction, cette contradiction est bien une conséquence de l'hypothèse initiale.

Démontrer une contradiction (voir la méthode)

Pour le faire, on cherche une proposition P telle qu'on puisse démontrer à la fois P et (non P).

Pour la première contradiction de notre démonstration, la proposition choisie est : " n est plus grand que tout nombre premier " dont la négation est " il existe un entier premier plus grand que n ".
Dans la deuxième contradiction, le raisonnement n'est pas entièrement exprimé. En fait " p divise 1 " a pour conséquence " $p = 1$ " qui est en contradiction avec " $p \neq 1$ ".

Choisir un nom d'objet (voir la méthode)

Quand on sait qu'il existe un ou plusieurs objets possédant une propriété, on peut donner un nom à l'un de ces objets.
On a par exemple admis, pour débuter notre démonstration, qu'il y avait un entier plus grand que tout nombre premier ; on choisit de nommer n cet entier.
On sait que a a un ou plusieurs diviseurs premiers ; on décide d'appeler p l'un de ces diviseurs premiers.

Beaucoup de liberté

Dans la pratique, on a beaucoup de liberté dans l'écriture d'une démonstration.

Les sous-entendus

La plupart des démonstrations contiennent des sous-entendus car il est fastidieux de rédiger des démonstration complètes. Par exemple, ici, on a omis d'écrire que " p divise 1 " implique " $p = 1$ ". Pour déduire que $a > n$ de $a = n! + 1$, il aurait fallu, pour être complètement explicite, dire que $n! \geq n$, qu'en conséquence $a \geq n + 1$, donc $a > n$.
La fin de la démonstration est aussi omise. D'abord on ne précise pas que, puisqu'on a obtenu une contradiction dans les deux cas possibles, il y a bien une contradiction. D'autre part, on ne dit pas que la conclusion finale est " la suite des nombres premiers est illimitée ".

L'ordre de l'argumentation

Il n'est pas obligatoire de rédiger une démonstration de l'hypothèse vers la conclusion. Ainsi on aurait pu remplacer :
" p serait plus petit que n, donc diviserait $n!$. Des deux relations : p divise a et p divise $n!$, on déduirait : p divise $a - n! = 1$. Contradiction. "
par :
" Montrons que $p = 1$, ce qui entraînera une contradiction. Pour cela, montrons que p divise $a - n! = 1$. En effet p divise $n!$ d'une part et a d'autre part, donc il divise leur différence. "
Ce sont les mots *montrons que* et *en effet* qui indique que certains résultats sont écrits avant leur justification.

Les mots de liaison

Il y a beaucoup de façon d'annoncer les démarches utilisées. Ainsi, pour expliquer qu'on entame un raisonnement par l'absurde, on aurait pu commencer notre démonstration par : " Raisonnons par l'absurde. Pour cela supposons que la suite des nombres premiers ne soit pas illimitée. Il existerait alors un entier plus grand que tous les nombres premiers. Appelons p un tel entier. " Et à la fin des deux paragraphes, les expressions

ce *qui est impossible* et *contradiction* sont synonymes.

Autres exemples :
– En
– En géométrie : un triangle qui a deux bissectrices de longueurs égales est isocèle.
– En analyse : l'unicité de la limite en un point d'une fonction.