Elément de cours des exercices

Qu'est-ce qu'une démonstration

Premier exemple : L'unicité de la limite
Si une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ admet une limite en un point, cette limite est unique.
Démonstration
Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et x_0 un élément de $\mathbb{R}$. Supposons que f ait une limite quand x tend vers x_0. Montrons que cette limite est unique.
Supposons que f admet deux limites distinctes en x_0, notées ℓ et ℓ'. Deux cas se présentent : soit $\ell < \ell'$, soit $\ell' < \ell$.
Supposons $\ell < \ell'$.
Choisissons $\alpha > 0$ de manière que les intervalles $]\ell - \alpha, \ell + \alpha[$ et $]\ell' - \alpha, \ell' + \alpha[$ soient disjoints. Pour cela il suffit que $\ell + \alpha < \ell' - \alpha$. Il faut donc choisir α tel que $0 < \alpha < (\ell' - \ell)/2$; c'est possible car $\ell' - \ell > 0$.
Comme ℓ est la limite de f au point x_0, il existe un nombre β strictement positif tel que $0 < |x - x_0| < \beta$ implique $|f(x) - l| < \alpha$. De même, il existe β' strictement positif tel que $0 < |x - x_0| < \beta'$ implique $|f(x) - \ell'| < \alpha$. Soit alors un réel x_1 qui vérifie à la fois $0 < |x_1 - x_0| < \beta$ et $0 < |x_1 - x_0| < \beta'$. On a alors simultanément $|f(x_1) - l| < \alpha$ et $|f(x_1) - l'| < \alpha$, c'est-à-dire $\ell - \alpha < f(x_1) < \ell + \alpha$ et $\ell' - \alpha < f(x_1) < \ell' + \alpha$. Mais cela est impossible puisque les intervalles $]\ell - \alpha, \ell + \alpha[$ et $]\ell' - \alpha, \ell' + \alpha[$ sont disjoints.
Dans le cas où $\ell' < \ell$, un raisonnement analogue conduirait aussi à une contradiction. Donc si f admet une limite, cette limite est unique.

Des démarches essentielles

Des pas de démonstration

C'est la démarche la plus fréquente : il s'agit, $P(x)$ et $Q(x)$ étant des propriétés d'un objet x appartenant à un ensemble E et a un objet de E, connaissant les résultats $P(a)$ et $(\forall x, P(x) \Longrightarrow Q(x))$, d'en déduire $Q(a)$. Par exemple, on sait que $0 < |x_1 - x_0| < \beta$ et que pour tout x, $0 < |x - x_0| < \beta \Longrightarrow |f(x) - l| < \alpha$ et on en déduit que $|f(x_1) - l| < \alpha$.

Un raisonnement par l'absurde (cf la méthode)

On veut démontrer A. Pour cela on ajoute (non A) aux hypothèses et on démontre que l'on aboutit à une contradiction.
Ainsi, dans cette démonstration, on veut démontrer que f n'a qu'une limite. On ajoute alors aux hypothèses que f a deux limites distinctes et on s'efforce de montrer qu'il y a une contradiction : deux intervalles sont disjoints et pourtant ils ont un élément commun.

La méthode des cas (cf la méthode)

Si on dispose d'une hypothèse de la forme (A ou B) et qu'on veut montrer C, on examine deux cas : dans le premier cas, on admet A et on démontre C, dans le deuxième cas on admet B, et on démontre C.
Ainsi, dans notre démonstration, on sait que ($\ell < \ell'$ ou $\ell' < \ell$). On examine le cas $\ell < \ell'$ et on démontre une contradiction. Puis on examine le cas $\ell' < \ell$, qui se raméne d'ailleurs au cas précédent en intervertissant les rôles de ℓ et de ℓ', et on démontre une contradiction.

L'hypothèse auxiliaire (voir la méthode)
Voulant montrer ($A \Longrightarrow B$), on ajoute A aux hypothèses et on démontre B.
Dans la démonstration précédente, on veut montrer que "si f admet une limite, elle est unique" ; on ajoute aux hypothèses que "f admet une limite" et on démontre que cette limite est unique.

Généralisation (voir la méthode)
Voulant démontrer une propriété de la forme ($\forall x \in E, P(x)$), on choisit une lettre qui n'a pas encore été utilisée pour désigner un élément de E, par exemple a, et on démontre $P(a)$.
On veut démontrer, ici, que pour une fonction quelconque de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et un point quelconque, si cette fonction a une limite en ce point, cette limite est unique. Pour cela on choisit les lettres f et x_0 pour désigner une fonction et un réel quelconques ; on annonce cette démarche en écrivant "soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et x_0 un réel". On démontre alors la propriété pour la fonction f et le point x_0.

Choisir un nom d'objet (voir la méthode)
Quand on sait qu'il existe un ou plusieurs objets possédant une propriété, on peut donner un nom à l'un de ces objets.
On sait par exemple que, puisque $(\ell' - \ell)/2 > 0$, il existe des réels strictement positif plus petit que ce nombre. On choisit alors d'appeler α un réel vérifiant cette propriété.

Démontrer $\exists x \in E, P(x)$
Pour démontrer $\exists x \in E, P(x)$, la méthode la plus fréquente consiste à construire un objet a de E qui vérifie $P(a)$. Par exemple, on veut montrer qu'il existe un point commun aux intervalles $]\ell - \alpha, \ell + \alpha[$ et $]\ell' - \alpha, \ell' + \alpha[$; pour cela on construit l'élément $f(x_1)$ qui appartient à ces deux intervalles.

Beaucoup de liberté

Dans la pratique, on a beaucoup de liberté dans l'écriture d'une démonstration.

Les sous-entendus
La plupart des démonstrations contiennent beaucoup de sous-entendus, car il est fastidieux de rédiger des démonstrations complètes. Mais on a beaucoup de liberté dans le choix de ces sous-entendus, en tenant compte du contexte et du niveau où l'on se

situe. Par exemple dans la démonstration ci-dessus, on écrit : "Soit alors un réel x_1 qui vérifie à la fois $0 < |x_1 - x_0| < \beta$ et $0 < |x_1 - x_0| < \beta'$ ". La démarche n'est valable que si un tel x_1 existe ; on peut estimer que ce résultat ne fait pas partie des résultats connus et nécessite une démonstration. On pourrait ajouter, par exemple : "Puisque β et β' sont strictement positifs, il existe un $x_2 > 0$ strictement inférieur à ces deux nombres ; si $x_1 = x_0 + x_2$, on a $0 < |x_1 - x_0| < \beta$ et $0 < |x_1 - x_0| < \beta'$ ".

L'ordre de l'argumentation

Une démonstration n'est pas obligatoirement rédigée de l'hypothèse vers la conclusion. C'est le cas par exemple du texte suivant : " Choisissons $\alpha > 0$ de manière que les intervalles $]\ell - \alpha, \ell + \alpha[$ et $]\ell' - \alpha, \ell' + \alpha[$ soient disjoints. Pour cela il suffit que $\ell + \alpha < \ell' - \alpha$. I. Il faut donc choisir α tel que $0 < \alpha < (\ell' - \ell)/2$; c'est possible car $\ell' - \ell > 0$ ". Ce sont les mots *il suffit* et *car* qui permettent ici de placer un résultat avant les arguments qui le justifient. Pour remettre les hypothèses avant les conclusions, on aurait pu écrire : " Comme $\ell' - \ell > 0$, il existe des réels compris entre 0 et $(\ell' - \ell)/2$; soit α un tel nombre. On a $\ell + \alpha < \ell' - \alpha$; on en déduit que les intervalles $]\ell - \alpha, \ell + \alpha[$ et $]\ell' - \alpha, \ell' + \alpha[$ sont disjoints. "

Les mots de liaison

Il y a beaucoup de façons d'annoncer les procédés utilisés. Par exemple, dans la démonstration ci-dessus, "Si cette limite n'est pas unique" annonce un raisonnement par l'absurde ; on aurait pu écrire : "Raisonnons par l'absurde et supposons que cette limite ne soit pas unique" ; à la fin de cette partie, "cela est impossible" aurait pu être remplacé par "il y a une contradiction car".

Le texte proprement démonstratif peut être mêlé à d'autres sortes de textes, comme des commentaires ou des textes heuristiques qui indiquent comment on a trouvé le résultat.
Ainsi la démonstration précédente aurait pu commencer par "On va exploiter l'idée que, lorsque f à une limite en x_0, les valeurs de la fonction f au voisinage de ce point sont proches de cette limite".

Autres exemples :
– En arithmétique : la suite des nombres premiers est illimitée.
– En géométrie : un triangle qui a deux bissectrices de longueurs égales est isocèle.