difficultés particulières des exercices

Fonctions arcsin, arccos et arctan

Les fonctions arcsin, arccos et arctan sont définies comme étant les fonctions réciproques respectivement de la fonction sinus définie sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, de la fonction cosinus définie sur $[0, \pi]$ et de la fonction tangente définie sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. Ce sont simplement de nouvelles fonctions à ajouter à vos connaissances.

Si vous ne connaîssez pas ces fonctions, évitez les exercices les utilisant ! Cependant, elles vous seront utiles lors de l'apprentissage de l'intégration ...

Le cours

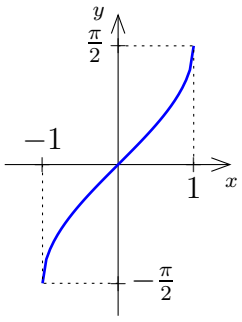
PROPOSITION. Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle I, strictement monotone sur cet intervalle. Alors, sur l'intervalle $J = f(I)$, on définit la fonction réciproque de f, notée f^{-1}, telle que, pour tout $y \in J$,

$$f^{-1}(y) = x \text{ si et seulement si } f(x) = y$$

On a les propriétés suivantes :

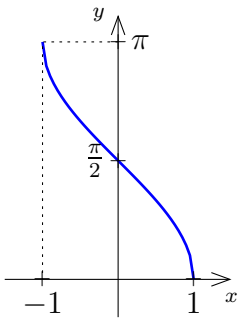
- la fonction réciproque f^{-1} est continue sur $J = f(I)$
- la fonction f^{-1} est monotone et a le même sens de monotonie que f.
- dans un repère orthonormé, le graphe de f^{-1} est symétrique de celui de f par rapport à la droite $y = x$.

DÉFINITION. La fonction $\sin$ est continue et strictement croissante sur $I = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ et $f(I) = [-1, 1]$. On définit la fonction $\arcsin$ sur l'intervalle $[-1, 1]$ à valeurs dans $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.



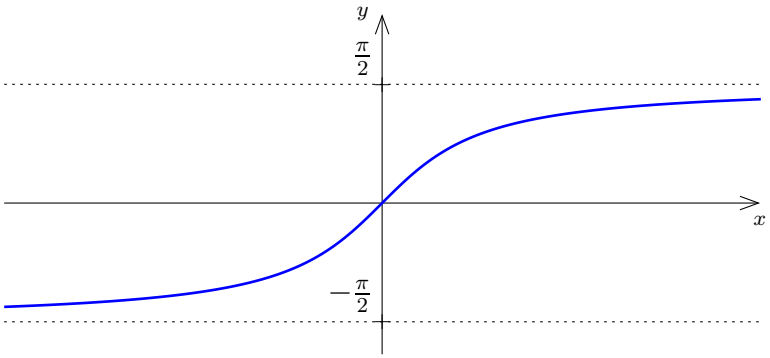
arcsin

DÉFINITION. La fonction $\cos$ est continue et strictement décroissante sur $I = [0, \pi]$ et $f(I) = [-1, 1]$. On définit la fonction $\arccos$ sur l'intervalle $[-1, 1]$ à valeurs dans $[0, \pi]$.



arccos

DÉFINITION. La fonction $\tan$ est continue et strictement croissante sur $I =]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ et $f(I) = \mathbb{R}$. On définit la fonction $\arctan$ sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.



arctan

Des difficultés sur le plan général

Les difficultés rencontrées portent souvent sur les simplifications que l'on peut faire en prenant garde au domaine d'étude. Par exemple,

$$\forall x \in [-1,1], \cos(\arccos x) = x \text{ et } \forall x \in [0,\pi], \arccos(\cos x) = x$$

Dans le premier cas, on ne peut de toute façon écrire $\cos(\arccos x)$ que si $x \in [-1,1]$. Par contre, la fonction $\arccos \circ \cos$ est définie sur $\mathbb{R}$, mais elle n'est égale à la fonction identité que sur l'intervalle $[0,\pi]$. Par exemple, $\arccos[\cos(2\pi)] = \arccos[\cos(0)]$ car $\cos$ est 2π-périodique. On a donc $\arccos[\cos(2\pi)] = 0$.

Une stratégie pour surmonter la difficulté

Une seule solution : être rigoureux et bien connaître la définition de ces fonctions !