Elément de cours des exercices

Fonctions trigonométriques réciproques

1 Fonction arcsinus

1.1 Définition

La fonction sinus est continue et strictement croissante sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, qu'elle applique bijectivement sur $[-1, 1]$. Elle admet donc une bijection réciproque définie sur $[-1, 1]$, appelée arcsinus et notée $\arcsin$. On a alors :

$$(y = \arcsin x \text{ et } x \in [-1, 1]) \Leftrightarrow \left(x = \sin y \text{ et } y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]\right). \tag{1}$$

Le réel $\arcsin x$ est donc le nombre appartenant à $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ dont le sinus est x.

Remarque. On a :

$$\forall x \in [-1, 1], \sin(\arcsin x) = x \tag{2}$$

mais on n'a pas toujours $\arcsin(\sin y) = y$. Ce n'est vrai que si $y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Par exemple, $\arcsin(\sin \pi) = 0$.

1.2 Propriétés

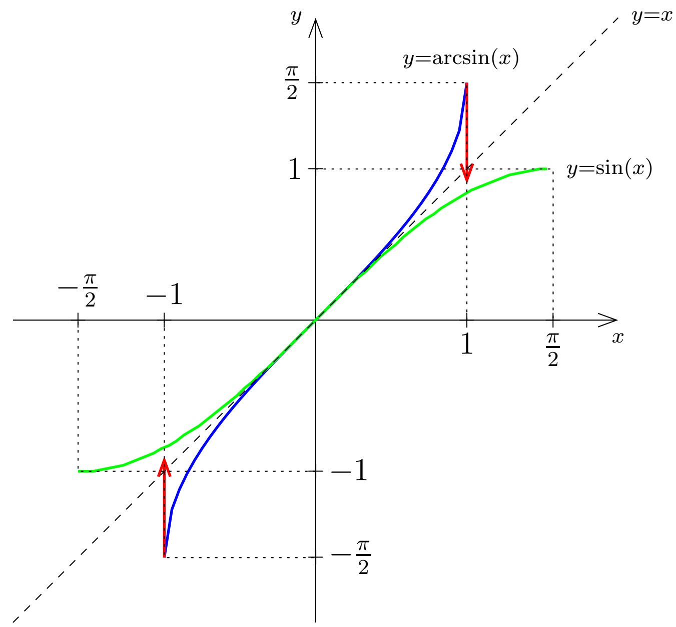
Les propriétés suivantes se déduisent de celles de la fonction sinus à l'aide des résultats sur les fonctions réciproques :

- $\arcsin$ est définie, continue et strictement croissante sur $[-1, 1]$,
- $\arcsin$ est impaire,
- $\arcsin$ est dérivable sur $]-1, 1[$ et on a :

$$\forall x \in]-1, 1[, \arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}. \tag{3}$$

1.3 Représentation graphique

Elle se déduit de celle de sinus par symétrie par rapport à la première bissectrice (dans un repère orthonormé) :



2 Fonction arccosinus

2.1 Définition

La fonction cosinus est continue et strictement décroissante sur $[0, \pi]$ qu'elle applique bijectivement sur $[-1, 1]$. Elle admet donc une bijection réciproque définie sur $[-1, 1]$, appelée arccosinus et notée $\arccos$. On a alors :

$$(y = \arccos x \text{ et } x \in [-1, 1]) \Leftrightarrow (x = \cos y \text{ et } y \in [0, \pi])\,. \tag{4}$$

Le réel $\arccos x$ est donc le nombre appartenant à $[0, \pi]$ dont le cosinus est x.

Remarque. On a :

$$\forall x \in [-1, 1]\,,\ \cos(\arccos x) = x \tag{5}$$

mais on n'a pas toujours $\arccos(\cos y) = y$. Ce n'est vrai que si $y \in [0, \pi]$. Par exemple,

$$\arccos(\cos 2\pi) = 0. \tag{6}$$

2.2 Propriétés

Les propriétés suivantes se déduisent de celles de la fonction cosinus :
- $\arccos$ est définie, continue et strictement décroissante sur $[-1, 1]$,

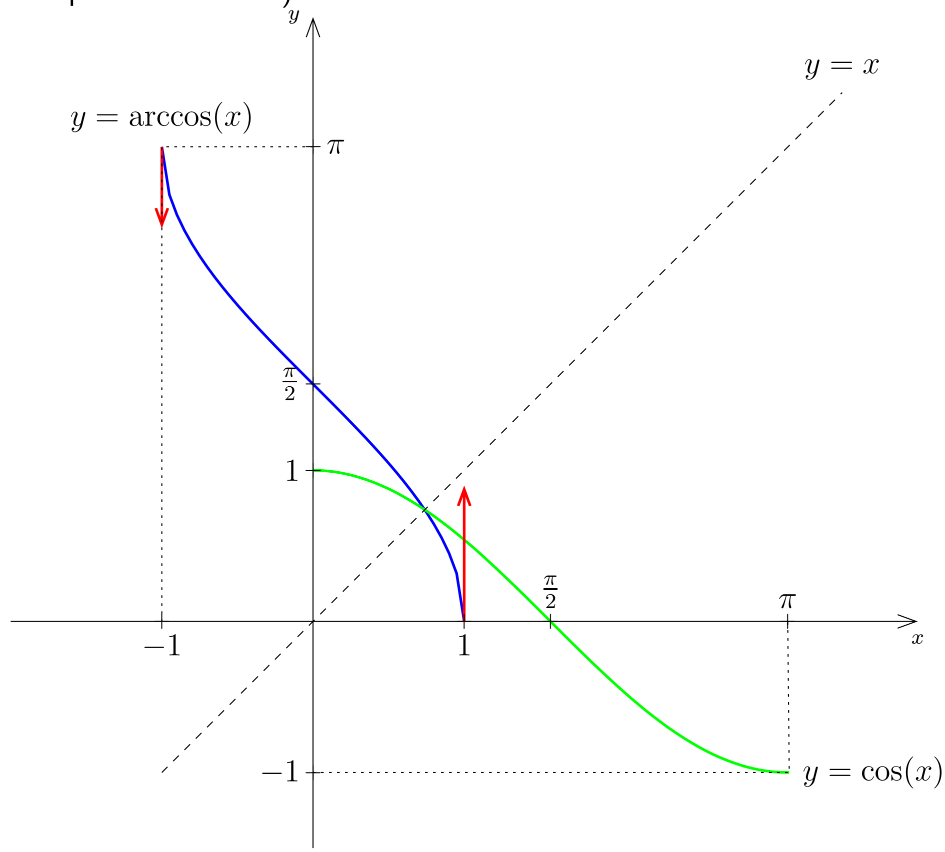
– $\arccos$ est dérivable sur $]-1,1[$ et

$$\forall x \in]-1,1[\,,\ \arccos'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}, \tag{7}$$

– De plus, pour tout $x \in [-1,1]\,,\ \arccos(-x) + \arccos x = \pi$. Sa courbe représentative admet donc le point de coordonnées $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ comme centre de symétrie.

2.3 Représentation graphique

Elle se déduit de celle de cosinus par symétrie par rapport à la première bissectrice (dans un repère orthonormé).



3 Fonction arctangente

3.1 Définition

La fonction tangente est continue et strictement croissante sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ qu'elle applique bijectivement sur $\mathbb{R}$. Elle admet donc une bijection réciproque définie sur $\mathbb{R}$, appelée arctangente et notée $\arctan$. On a alors :

$$(y = \arctan x) \Leftrightarrow \left(x = \tan y \text{ et } y \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\right). \tag{8}$$

Le réel $\arctan x$ est donc le nombre appartenant à $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ dont la tangente est x.

REMARQUE. On a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \tan(\arctan x) = x \tag{9}$$

mais on n'a pas toujours $\arctan(\tan y) = y$. Ce n'est vrai que si $y \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. Par exemple, $\arctan(\tan 2\pi) = 0$.

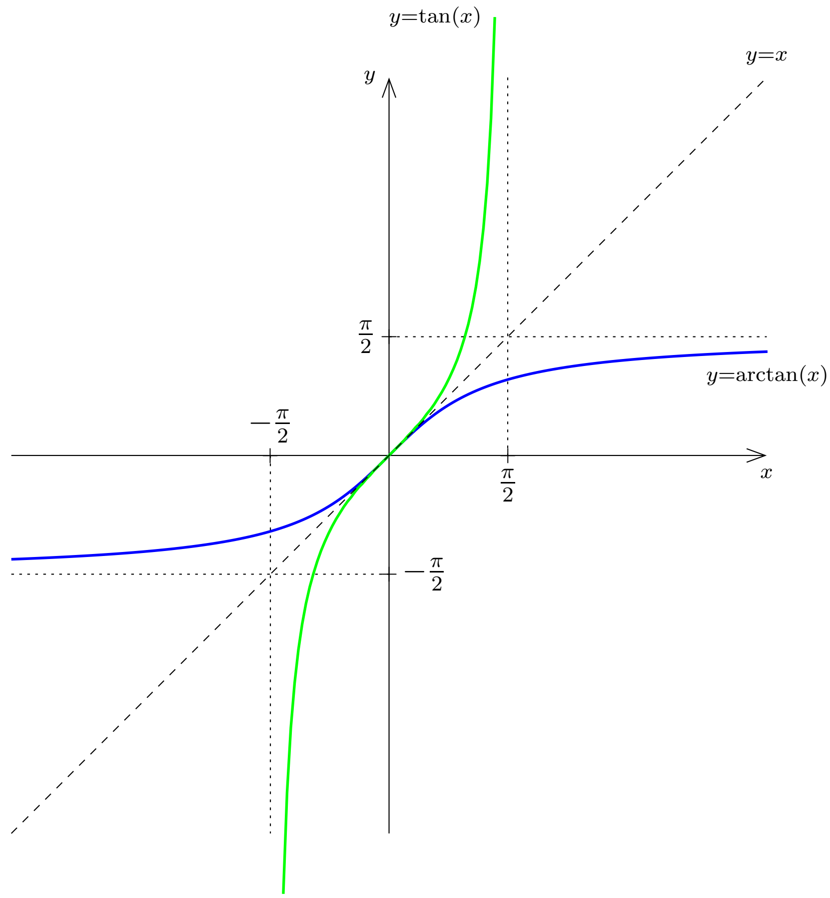
3.2 Propriétés

Les propriétés suivantes se déduisent de celles de la fonction tangente :
– arctangente est définie, continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$,
– Cette fonction est impaire,
– Elle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}. \tag{10}$$

3.3 Représentation graphique

Elle se déduit de celle de tangente par symétrie par rapport à la première bissectrice (dans un repère orthonormé) :



4 Quelques autres formules usuelles

$$\boxed{\forall x \in [-1,1]\,,\ \arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}.} \tag{11}$$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}^*,\ \arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2} & \text{si } x > 0 \\ -\dfrac{\pi}{2} & \text{si } x < 0 \end{cases}.} \tag{12}$$