Elément de cours des exercices

# Système d'équations linéaires

Ici, nous considérons que $\mathbb{K}$ est le corps $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
Un système d'équations linéaires à $m$ équations et $n$ inconnues s'écrit :

$$(\mathcal{E})\left\{\begin{array}{ccccccc} a_{1,1}x_1 & + & ... & + & a_{1,n}x_n & = & b_1 \\ a_{2,1}x_1 & + & ... & + & a_{2,n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & & & & & \\ a_{m,1}x_1 & + & ... & + & a_{m,n}x_n & = & b_m \end{array}\right. .$$

Dans ce système linéaire, les coefficients $a_{i,j}$ sont connus ; de même que les scalaires $b_1, ..., b_m$. Les inconnues sont les $x_1, ..., x_n$.

Résoudre ce système signifie déterminer l'ensemble des $n$-uplets $(\alpha_1, ..., \alpha_n)$ de $\mathbb{K}^n$ qui en sont solutions, c'est à dire tel que :

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} a_{1,1}\alpha_1 & + & ... & + & a_{1,n}\alpha_n & = & b_1 \\ a_{2,1}\alpha_1 & + & ... & + & a_{2,n}\alpha_n & = & b_2 \\ \vdots & & & & & & \\ a_{m,1}\alpha_1 & + & ... & + & a_{m,n}\alpha_n & = & b_m \end{array}\right.$$

**Un conseil à suivre : lorsque vous écrivez un système d'équations linéaires, efforcez vous de faire apparaître les inconnues $x_i$ en dessous des inconnues $x_i$ :** $x_1$ de la seconde équation en dessous de $x_1$ de la première équation, de même pour $x_2$ et ainsi de suite.

Nous détaillons ici la méthode du pivot de Gauss pour la résolution de systèmes d'équations linéaires. L'idée consiste à se ramener à un système équivalent plus simple à résoudre (échelonné). Notre plan est le suivant :

*(a)* Systèmes équivalents, opérations autorisées
*(b)* Des systèmes faciles à résoudre : les systèmes échelonnés
*(c)* Description algorithmique de la méthode du pivot de Gauss (théorie)
*(d)* Illustration de la méthode du pivot de Gauss sur des exemples

Signalons que si on connaît une solution particulière $(\beta_1, ..., \beta_n)$ de ce système, alors $(x_1, ..., x_n)$ est solution de ce système si et seulement si $(y_1 = x_1 - \beta_1, ..., y_n = x_n - \beta_n)$ est solution du système linéaire "homogène" associé :

$$(\mathcal{H})\left\{\begin{array}{ccccccc} a_{1,1}y_1 & + & ... & + & a_{1,n}y_n & = & 0 \\ a_{2,1}y_1 & + & ... & + & a_{2,n}y_n & = & 0 \\ \vdots & & & & & & \\ a_{m,1}y_1 & + & ... & + & a_{m,n}y_n & = & 0 \end{array}\right.$$

Nous n'utilisons pas ce point de vue ici mais nous renvoyons à ICI pour plus de détails. Remarquons seulement que le système $(\mathcal{H})$ admet toujours au moins une solution : $(0, ..., 0)$.

Remarquons, d'autre part, que si $(\alpha_1, ..., \alpha_n)$ et $(\beta_1, ..., \beta_n)$ sont deux solutions de notre système $(\mathcal{E})$, alors tous les $n$-uplets de la forme $(t\alpha_1+(1-t)\beta_1, ..., t\alpha_n+(1-t)\beta_n)$ avec $t \in \mathbb{K}$ sont encore solutions de $(\mathcal{E})$.

Questions amenant à des résolutions de systèmes d'équations linéaires

Point de vue matriciel

## Point de vue matriciel

D'un point de vue matriciel, le système

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} a_{1,1}x_1 & + & \dots & + & a_{1,n}x_n & = & b_1 \\ a_{2,1}x_1 & + & \dots & + & a_{2,n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & & & & & \\ a_{m,1}x_1 & + & \dots & + & a_{m,n}x_n & = & b_m \end{array}\right.$$

s'écrit $AX = B$ où $A = (a_{i,j})_{i=1,\dots,m;\ j=1,\dots,n}$ est une matrice à $m$ lignes et $n$ colonnes, où $B = (b_1, \dots, b_m)$ est un vecteur de $\mathbb{K}^m$ et où $X = (x_1, \dots, x_n)$ est un vecteur de $\mathbb{K}^n$ inconnu.

VU

## Questions amenant à des résolutions de systèmes d'équations linéaires

En algèbre linéaire, on est souvent amené à la résolution de systèmes d'équations linéaires. Ici $E$ et $F$ désignent des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels quelconques de **dimension finie**. Voici quelques exemples de problèmes être traités en résolvant un système d'équations linéaires :

- Déterminer si une famille de vecteurs $\left\{\vec{v}^{(1)}, ..., \vec{v}^{(n)}\right\}$ est libre, revient à déterminer l'ensemble des $n$-uplets $(\lambda_1, ...\lambda_n)$ tels que $\lambda_1\vec{v}^{(1)} + ... + \lambda_n\vec{v}^{(n)} = \vec{0}$.
- Essayer d'écrire un vecteur $\vec{v} \in E$ comme combinaison linéaire de vecteurs $\vec{v}^{(1)}, ..., \vec{v}^{(n)}$ (de $E$) revient à déterminer l'ensemble des $n$-uplets $(\lambda_1, ...\lambda_n)$ tels que $\lambda_1\vec{v}^{(1)} + ... + \lambda_n\vec{v}^{(n)} = \vec{v}$.
  - Si $E = \mathbb{K}^m$ et si $\vec{v}^{(1)} = \begin{pmatrix} v_1^{(1)} \\ \vdots \\ v_m^{(1)} \end{pmatrix}$, $\vec{v}^{(2)} = \begin{pmatrix} v_1^{(2)} \\ \vdots \\ v_m^{(2)} \end{pmatrix}$,..., $\vec{v}^{(n)} = \begin{pmatrix} v_1^{(n)} \\ \vdots \\ v_m^{(n)} \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_m \end{pmatrix}$, alors l'égalité $\lambda_1\vec{v}_1 + ... + \lambda_n\vec{v}_n = \vec{v}$ s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{c} v_1^{(1)}\lambda_1 + ... + v_1^{(n)}\lambda_n = v_1 \\ v_2^{(1)}\lambda_1 + ... + v_2^{(n)}\lambda_n = v_2 \\ \vdots \\ v_m^{(1)}\lambda_1 + ... + v_m^{(n)}\lambda_n = v_m \end{array} \right.$$

  - Sinon, on considère une base $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, ..., \vec{e}_m)$ de $E$. Pour tout $j = 1, ..., n$, nous notons $(v_1^{(j)}, ..., v_m^{(j)})$ les coordonnées de $\vec{v}^{(j)}$ dans la base $\mathcal{B}$ et on écrit l'égalité $\lambda_1\vec{v}^{(1)} + ... + \lambda_n\vec{v}^{(n)} = \vec{v}$ exprimée dans la base $\mathcal{B}$. Nous nous ramenons ainsi à un système d'équations linéaires de la même forme que dans le cas où $E = \mathbb{K}^m$.
- Déterminer le noyau d'une application $\mathbb{K}$-linéaire $\varphi : E \to F$ se ramène à résoudre $AX = 0$ où $A$ est la matrice associée à $\varphi$ dans une base (quelconque). Le noyau de $\varphi$ est l'ensemble des antécédents de $0$ par $\varphi$. Voir ! ! ! ! ! ! (lien vers "*écriture matricielle*")
- Trouver les antécédents d'un vecteur $\vec{v} \in F$ par une application linéaire $\varphi : E \to F$ revient à résoudre $AX = B$, en utilisant l'écriture matricielle.

VU

## Systèmes équivalents, opérations autorisées

Deux systèmes d'équations linéaires sont dits équivalents si ils ont les mêmes inconnues et les mêmes solutions.

Les opérations suivantes transforment un système d'équations linéaires en un système d'équations linéaires équivalent :

- échanger deux équations ;
- multiplier une équation par un scalaire non nul ;
- ajouter à une équation une combinaison linéaire d'autres équations **sans modifier ces autres équations en même temps**.

Par exemple (ici $\mathbb{K} = \mathbb{C}$), les systèmes suivants sont équivalents :

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} & & & & z & + & t & = & 2 \\ x & + & y & + & 3z & + & t & = & i \\ & & & & & & 3t & = & 1 \end{array}\right. \quad \begin{array}{c}(E_1)\\(E_2)\\(E_3)\end{array}$$

(échangeons les deux premières équations)

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} x & + & y & + & 3z & + & t & = & i \\ & & & & z & + & t & = & 2 \\ & & & & & & 3t & = & 1 \end{array}\right. \quad \begin{array}{c}(E'_1 = E_2)\\(E'_2 = E_1)\\(E_3)\end{array}$$

(Divisons la troisième équation par 3 de sorte à déterminer la valeur de $t$)

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} x & + & y & + & 3z & + & t & = & i \\ & & & & z & + & t & = & 2 \\ & & & & & & t & = & \frac{1}{3} \end{array}\right. \quad \begin{array}{c}(E'_1)\\(E'_2)\\(E'_3 = \frac{1}{3}E_3)\end{array}$$

(Éliminons $t$ des autres équations)

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & 3z & = & i - \frac{1}{3} \\ & & & & z & = & \frac{5}{3} \\ & & & & 3t & = & \frac{1}{3} \end{array}\right. \quad \begin{array}{c}(E''_1 = E'_1 - E'_3)\\(E''_2 = E'_2 - E'_3)\\(E'_3 = \frac{1}{3}E_3)\end{array}$$

(Éliminons $z$ de la première équation)

$$\left\{\begin{array}{ccccc} x & + & y & = & i - \frac{16}{3} \\ & & z & = & \frac{5}{3} \\ & & 3t & = & \frac{1}{3} \end{array}\right. \quad \begin{array}{c}(E'''_1 = E''_1 - 3E''_2)\\(E''_2)\\(E'_3)\end{array}$$

Ainsi, l'ensemble des solutions de

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} & & & & z & + & t & = & 2 \\ x & + & y & + & 3z & + & t & = & i \\ & & & & & & 3t & = & 1 \end{array}\right.$$

est l'ensemble des quadruplets $(x, y, z, t) \in \mathbb{C}^4$ tels que :

$$(x, y, z, t) = \left(-y + i - \frac{16}{3}, y, \frac{5}{3}, \frac{1}{3}\right),$$

c'est-à-dire tels que :

$$(x, y, z, t) = \left(i - \frac{16}{3}, 0, \frac{5}{3}, \frac{1}{3}\right) + y(-1, 1, 0, 0).$$

L'ensemble des solution est donc :

$$\left(i - \frac{16}{3}, 0, \frac{5}{3}, \frac{1}{3}\right) + \mathbb{R}(-1, 1, 0, 0) = \left(i - \frac{16}{3}, 0, \frac{5}{3}, \frac{1}{3}\right) + Vect((-1, 1, 0, 0)).$$

VU

## Des systèmes faciles à résoudre : les systèmes échelonnés

- Définition et exemples
- Résolution de systèmes échelonnés : théorie
- Résolution de systèmes échelonnés : pratique

### Définition et exemples

Un système d'équations linéaires :

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} a_{1,1}x_1 & + & \dots & + & a_{1,n}x_n & = & b_1 \\ a_{2,1}x_1 & + & \dots & + & a_{2,n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & & & & & \\ a_{m,1}x_1 & + & \dots & + & a_{m,n}x_n & = & b_m \end{array}\right.$$

est dit **échelonné** s'il existe une suite (finie) strictement croissante d'entiers $1 \leq n_1 < n_2 < \dots < n_p \leq n$ telle que :

- pour tout $i = 1, \dots, m$ et tout $j = 1, \dots, n$ tel que $j < n_i$, on a : $a_{i,j} = 0$ ;
- pour tout $i = 1, \dots, m$, on a : $a_{i,n_i} = 1$.

C'est-à-dire que le système est de la forme :

$$\left\{\begin{array}{cccccccccc} x_{n_1} & + & a_{1,n_1+1}x_{n_1+1} & + & \dots & \dots & \dots & + & a_{1,n}x_n & = & b_1 \\ & & & & x_{n_2} & + & a_{2,n_2+1}x_{n_2+1} + \dots & + & a_{2,n}x_n & = & b_2 \\ & & & & & \ddots & & & & & \\ & & & & & & x_{n_p} + a_{p,n_p+1}x_{n_p+1} + \dots & + & a_{p,n}x_n & = & b_p \\ & & & & & & & & 0 & = & b_{p+1} \\ & & & & & & & & & & \vdots \\ & & & & & & & & 0 & = & b_m \end{array}\right.$$

avec $1 \leq p \leq m$ et $1 \leq n_1 < n_2 < \dots < n_p \leq n$.

Voici trois exemples de systèmes échelonnés :

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & z & = & 1 \\ & & y & + & \frac{1}{2}z & = & 1 \\ & & & & z & = & 3 \end{array}\right. \quad (\text{avec } n_1 = 1,\ n_2 = 2,\ n_3 = 3);$$

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & z & = & 2 \\ & & & & z & = & 3 \\ & & & & 0 & = & 2 \end{array}\right. \quad (\text{avec } n_1 = 1,\ n_2 = 3,\ n_3 = 4)$$

et

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & z & = & 1 \\ & & & & z & = & 3 \end{array}\right. \quad (\text{avec } n_1 = 1,\ n_2 = 3,\ n_3 = 4).$$

VU

## Résolution de systèmes échelonnés : théorie

Un tel système est facile à résoudre :

- Si un des $b_{p+1}, ..., b_m$ est nul, alors le système n'admet pas de solution.
- Sinon, il admet au moins une solution. Pour tout $k = 1, ..., m$, notons $E_k$ la $k^{ème}$ équation du système. Voici une méthode pour résoudre ce système :
  On commence par éliminer les termes en $x_{n_p}$ des $(p-1)$ premières équations (en remplaçant l'équation $E_k$ par $E_k - a_{k,n_p}E_p$ pour tout $k \in \{1, ..., p-1\}$).
  Puis on recommence avec $x_{n_{p-1}}$ : on élimine les termes en $x_{n_{p-1}}$ des $(p-2)$ premières équations (en remplaçant $E_k$ par $E_k - a_{k,n_{p-1}}E_{p-1}$ pour tout $k \in \{1, ..., p-2\}$). Et ainsi de suite.
  En procédant de la sorte, on obtient finalement un système exprimant les inconnues $x_{n_k}$ (pour $k = 1, ..., p$) en fonction des autres inconnues, ce qui nous permet de résoudre le système.

VU

## Résolution de systèmes échelonnés : pratique

Nous allons à présent résoudre les trois systèmes donnés précédemment en exemple.

1. Les systèmes suivants sont équivalents :

$$\left\{\begin{array}{ccccccll} x & + & y & + & z & = & 1 & (E_1) \\ & & y & + & \frac{1}{2}z & = & 1 & (E_2) \\ & & & & z & = & 3 & (E_3) \end{array}\right.$$

(éliminons $z$ des deux premières équations)

$$\left\{\begin{array}{cccccccl} x & + & y & & & = & -2 & (E_1' = E_1 - E_3) \\ & & y & & & = & -\frac{1}{2} & (E_2' = E_2 - \frac{1}{2}E_3) \\ & & & & z & = & 3 & (E_3) \end{array}\right.$$

(éliminons $y$ de la première équation)

$$\left\{\begin{array}{cccl} x & = & -\frac{3}{2} & (E_1'' = E_1' - E_2') \\ y & = & -\frac{1}{2} & (E_2') \\ z & = & 3 & (E_3') \end{array}\right.$$

Ainsi, le premier système admet pour unique solution $\left(-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, 3\right)$. C'est-à-dire que l'ensemble de ses solutions est : $\left\{\left(-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, 3\right)\right\}$.

2. Comme $2 \neq 0$, le deuxième système n'admet pas de solution. C'est-à-dire que l'ensemble de ses solutions est $\emptyset$.
3. Les systèmes suivants sont équivalents :

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & z & = & 1 \quad (E_1) \\ & & & & z & = & 3 \quad (E_2) \end{array}\right.$$

(éliminons $z$ de la première équation)

$$\left\{\begin{array}{cccccl} x & + & y & & = & -2 \quad (E_1' = E_1 - E_2) \\ & & & z & = & 3 \qquad\qquad (E_2) \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{ccc} x & = & -2-y \\ z & = & 3 \end{array}\right.$$

Ainsi, le troisième système admet une infinité de solutions. L'ensemble de ses solutions est :

$$\{(-2-y, y, 3);\ y \in \mathbb{K}\} = \{(-2,0,3) + y(-1,1,0);\ y \in \mathbb{K}\},$$

c'est-à-dire : $(-2,0,3) + Vect((-1,1,0))$.

VU

# Retour vers la première page sur les systèmes linéaires

## Résolution par la méthode du pivot de Gauss (théorie)

La méthode du pivot de Gauss pour les systèmes d'équations linéaires transforme un système d'équations linéaires en un système d'équations linéaires échelonné équivalent. Cette méthode utilise uniquement les deux types d'opérations autorisées vues précédemment. Cette méthode se fait en, au plus, $\min(m, n)$ étapes telles qu'à l'issue de l'étape $k$, le système obtenu ait la forme $\mathcal{H}_k$ suivante :

$$\left\{\begin{array}{cccccccccc}
x_{n_1} & + & a_{1,n_1+1}x_{n_1+1} & + & \dots & \dots & \dots & + & a_{1,n}x_n & = & b_1 \\
 & & & & x_{n_2} & + & a_{2,n_2+1}x_{n_2+1}+\dots & + & a_{2,n}x_n & = & b_2 \\
 & & & & & \ddots & & & & & \\
 & & & & & & x_{n_k}+a_{k,n_k+1}x_{n_k+1}+\dots & + & a_{k,n}x_n & = & b_k \\
 & & & & & & 0+a_{k+1,n_k+1}x_{n_k+1}+\dots & + & a_{k+1,n}x_n & = & b_{k+1} \\
 & & & & & & & & & & \vdots \\
 & & & & & & 0+a_{m,n_k+1}x_{n_k+1}+\dots & + & a_{m,n}x_n & = & b_m
\end{array}\right. ,$$

avec $1 \leq n_1 < n_2 < \dots < n_k \leq n$.

Nous décrivons à présent l'étape $k$ de la méthode du Pivot de Gauss : Étant donné un système de la forme $\mathcal{H}_{k-1}$, nous allons le transformer de sorte à obtenir un système de la forme $\mathcal{H}_k$.

Nous noterons $E_j$ la $j^{ème}$ équation du système.

- On ne modifie pas les $k-1$ premières équations du système linéaire.
- Si tous les coefficients $a_{l,m}$ (avec $l \geq k$ et $m > n_{k-1}$) sont nuls, alors, pour tout $l \geq k$, l'équation $E_l$ s'écrit : $0 = b_l$. Le système a donc la forme voulue. L'algorithme s'arrête.
- Sinon, on pose $n_k := \min\{m \ : \ \exists l \geq k \ : \ a_{l,m} \neq 0\}$. Alors, quitte à échanger la ligne $k$ avec une ligne $p \geq k$ (telle que $a_{p,n_k} \neq 0$), on se ramène au cas où $a_{k,n_k}$ est non nul (ce sera notre pivot pour l'étape $k$).
  On remplace alors l'équation $E_k$ par $\frac{1}{a_{k,n_k}} E_k$ pour se ramener à : $a_{k,n_k} = 1$.
- Puis, pour tout $p > k$, on remplace $E_p$ par $E_p - a_{p,n_k} E_k$ (afin d'éliminer les termes en $x_{n_k}$ des équations $k+1, \dots, m$).
- Le système d'équations linéaires ainsi obtenu est alors de la forme $\mathcal{H}_k$, l'étape $k$ est finie.

VU

## Illustration de la méthode du pivot de Gauss sur des exemples

On veut résoudre le système suivant dans $\mathbb{R}^4$ :

$$\left\{\begin{array}{ccccccccccc} x & + & y & - & z & + & t & & & = & 1 \\ & & & & & & 8t & & & = & 2 \\ 2x & + & 2y & + & z & + & 3t & & & = & 2 \\ & & & & 2z & & & + & u & = & 0 \end{array}\right.$$

Nous utilisons la méthode du Pivot de Gauss (à chaque étape, le pivot est encadré). Les systèmes d'équations linéaires suivants sont équivalents :

$$\left\{\begin{array}{cccccccccccl} x & + & y & - & z & + & t & & & = & 1 & (E_1) \\ & & & & & & 8t & & & = & 2 & (E_2) \\ 2x & + & 2y & + & z & + & 3t & & & = & 2 & (E_3) \\ & & & & 2z & & & + & u & = & 0 & (E_4) \end{array}\right.$$

(il y a un terme en $x$ dans la première équation, notre premier pivot de Gauss sera ce terme : nous l'utilisons pour éliminer les termes en $x$ des autres équations)

$$\left\{\begin{array}{cccccccccccc} \boxed{\text{x}} & + & y & - & z & + & t & & & = & 1 & (E_1) \\ & & & & & & 8t & & & = & 2 & (E_2) \\ & & & & 3z & + & t & & & = & 0 & (E_3' = E_3 - 2E_1) \\ & & & & 2z & + & 0 & + & u & = & 0 & (E_4) \end{array}\right.$$

(nous oublions à présent la première ligne ; il n'y a pas de terme en $y$ dans les équations $E_2$, $E_3'$ et $E_4$ ; il y a un terme en $z$ dans $E_3'$ mais pas dans $E_2$ ; nous permutons donc les équations $E_2$ et $E_3'$)

$$\left\{\begin{array}{cccccccccccc} x & + & y & - & z & + & t & & & = & 1 & (E_1) \\ & & & & 3z & + & t & & & = & 0 & (E_2' = E_3') \\ & & & & & & 8t & & & = & 2 & (E_3'' = E_2) \\ & & & & 2z & + & 0 & + & u & = & 0 & (E_4) \end{array}\right.$$

(nous divisons la deuxième équation par 3 de sorte à avoir $z$ au lieu de $3z$ dans la deuxième équation)

$$\left\{\begin{array}{cccccccccccc} x & + & y & - & z & + & t & & & = & 1 & (E_1) \\ & & & & z & + & \frac{1}{3}t & & & = & 0 & (E_2'' = \frac{1}{3}E_2') \\ & & & & & & 8t & & & = & 2 & (E_3'') \\ & & & & 2z & + & 0 & + & u & = & 0 & (E_4) \end{array}\right.$$

(le terme en $z$ de la deuxième équation est notre nouveau pivot de Gauss ; nous l'utilisons pour éliminer les termes en $z$ des équations situés en dessous)

$$\left\{\begin{array}{cccccccccccc} x & + & y & - & z & + & t & & & = & 1 & (E_1) \\ & & & & \boxed{\text{z}} & + & \frac{1}{3}t & & & = & 0 & (E_2'') \\ & & & & & & 8t & & & = & 2 & (E_3'') \\ & & & & & & -\frac{2}{3}t & + & u & = & 0 & (E_4' = E_4 - 2E_2'') \end{array}\right.$$

(nous oublions à présent la deuxième équation ; il y a un terme en $t$ dans la troisième équation, nous divisons la troisième équation par 8 de sorte à avoir $t$ à la place de $8t$ dans cette équation)

$$\begin{cases} x + y - z + t = 1 & (E_1) \\ z + \frac{1}{3}t = 0 & (E_2'') \\ t = \frac{1}{4} & (E_3''' = \frac{1}{8}E_3'') \\ -\frac{2}{3}t + u = 0 & (E_4') \end{cases}$$

(le terme en $t$ de la troisième équation devient notre nouveau pivot de Gauss : nous l'utilisons pour éliminer les termes en $t$ de la quatrième équation)

$$\begin{cases} x + y - z + t = 1 & (E_1) \\ z + \frac{1}{3}t = 0 & (E_2'') \\ \boxed{\mathsf{t}} = \frac{1}{4} & (E_3''' = \frac{1}{8}E_3'') \\ u = \frac{1}{6} & (E_4'' = E_4' + \frac{2}{3}E_3''') \end{cases}$$

Ce système d'équations linéaires est échelonné et équivalent à notre système initial.

Nous le résolvons en appliquant la méthode expliquée ICI pour la théorie et ICI pour la pratique sur des exemples. Notre système est équivalent aux systèmes suivants :

(utilisons la dernière équation pour éliminer $u$ des autres équations : inutile il n'y a pas de $u$ dans les autres équations ; utilisons la troisième équation pour éliminer les termes en $t$ des deux premières équations)

$$\begin{cases} x + y - z = \frac{3}{4} & (E_1' = E_1 - E_3''') \\ z = -\frac{1}{12} & (E_2''' = E_2'' - \frac{1}{3}E_3''') \\ t = \frac{1}{4} & (E_3''') \\ u = \frac{1}{6} & (E_4'' = E_4' + \frac{2}{3}E_3''') \end{cases}$$

(utilisons la deuxième équation pour éliminer $z$ de la première)

$$\begin{cases} x + y = \frac{8}{12} & (E_1'' = E_1' + E_2''') \\ z = -\frac{1}{12} & (E_2''') \\ t = \frac{1}{4} & (E_3''') \\ u = \frac{1}{6} & (E_4'' = E_4' + \frac{2}{3}E_3''') \end{cases}$$

(Le dernier système obtenu donne une expression de $x, z, t$ en fonction de $y$). Ainsi, notre système admet une infinité de solutions et l'ensemble de ses solutions est :

$$\left\{ \left( \frac{8}{12} - y, y, -\frac{1}{12}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6} \right) ; y \in \mathbb{R} \right\},$$

c'est-à-dire :

$$\left\{ \left( \frac{8}{12}, 0, -\frac{1}{12}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6} \right) + y(-1, 1, 0, 0, 0); y \in \mathbb{R} \right\},$$

ce qui s'écrit encore :

$$(\frac{8}{12}, 0, -\frac{1}{12}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}) + Vect((-1, 1, 0, 0, 0)).$$

# VU

Retour à la liste