Elément de cours des exercices

Famille libre, famille liée

Ici, nous considérons que $\mathbb{K}$ est le corps $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On appelle scalaire tout élément de $\mathbb{K}$.

Définition

Une famille de vecteurs $\{\vec{v}_j, j \in \mathcal{J}\}$ (où $\mathcal{J}$ est un ensemble quelconque) d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E est dite **liée** *si il existe un entier $m \geq 1$, des indices $j_1, ..., j_m \in \mathcal{J}$ et des scalaires $\lambda_1, ..., \lambda_m$ tels que :*

$$\lambda_1 \vec{v}_{j_1} + ... + \lambda_m \vec{v}_{j_m} = 0_E.$$

La famille $\{\vec{v}_j, j \in \mathcal{J}\}$ est dite **libre** *si elle n'est pas liée.*

Ainsi, pour déterminer si une famille finie $\{\vec{v}_1, ..., \vec{v}_n\}$ d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E est libre ou liée, il suffit de déterminer l'ensemble des $(\lambda_1, ..., \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ solutions de :

$$\lambda_1 \vec{v}_1 + ... + \lambda_n \vec{v}_n = \vec{0}.$$

La famille $\{\vec{v}_1, ..., \vec{v}_n\}$ sera libre si la seule solution est $(0, ..., 0)$. Elle sera liée sinon.

Cas où $E = \mathbb{K}^m$

Toute famille infinie d'éléments de $\mathbb{K}^m$ est nécessairement liée.

Soit $\{\vec{v}_1, ..., \vec{v}_n\}$ une famille finie de $E = \mathbb{K}^m$. Voici deux méthodes permettant de déterminer si cette famille est libre ou liée et permettant de plus, si elle est liée, de déterminer les relations linéaires sur ses vecteurs :

(i) Résolution d'un système d'équations linéaires

(ii) Échelonnement de la famille de vecteurs

Cas où E est de dimension finie

De même que dans le cas précédent, toute famille infinie d'éléments de E est nécessairement liée.

Soit E est un espace vectoriel de dimension finie m sur $\mathbb{K}$.

Soit $\{\vec{v}_1, ..., \vec{v}_n\}$ une famille finie de E.

Alors, on considère une base $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, ..., \vec{e}_m)$ de E. En utilisant l'écriture des vecteurs dans la base $\mathcal{B}$ (voir l'élément de cours sur les bases) on se ramène au cas où $E = \mathbb{K}^m$ de la manière suivante :

Pour tout $i = 1, ..., n$, il existe un unique $w_i = (v_i^{(1)}, ..., v_i^{(m)}) \in \mathbb{K}^m$ tel que $\vec{v}_i = \sum_{j=1}^m v_i^{(j)} e_j$. De plus, si $\lambda_1, ..., \lambda_n$ sont des scalaires, l'égalité

$$\lambda_1 \vec{v}_1 + ... + \lambda_n \vec{v}_n = \vec{0}_E \quad \text{dans E}$$

équivaut à l'égalité :

$$\lambda_1 w_1 + ... + \lambda_n w_n = 0_{\mathbb{K}^m} \quad \text{dans } \mathbb{K}^m.$$

En particulier, la famille de vecteurs $\{\vec{v}_1, ..., \vec{v}_n\}$ est libre dans E si et seulement si la famille $\{\vec{w}_1, ..., \vec{w}_n\}$ est libre dans $\mathbb{K}^m$.

On se ramène ainsi au cas où $E = \mathbb{K}^m$.

Cas plus compliqués : en dimension infinie

Un exemple classique de $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension infinie est l'ensemble des applications définies sur un même ensemble à valeurs dans $\mathbb{K}$. L'espace vectoriel des suites d'éléments de $\mathbb{K}$ en est un cas particulier.

Soit G un ensemble quelqonque. Rappelons que l'ensemble $\mathbb{K}^G$ des applications de G dans $\mathbb{K}$ est muni de manière naturelle d'une structure de $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Voir l'élément de cours sur les espaces de fonctions.

Soit une famille finie $\{\vec{v}_1, ..., \vec{v}_n\}$ de $\mathbb{K}^G$. Alors, les $\vec{v}_i$ sont des applications de G dans $\mathbb{K}$.

Soient des scalaires $\lambda_1, ..., \lambda_n$. Dire que $\lambda_1\vec{v}_1 + ... + \lambda_n\vec{v}_n = \vec{0}$ signifie que :

$$\forall x \in G, \quad \lambda_1\vec{v}_1(x) + ... + \lambda_n\vec{v}_n(x) = 0.$$

De même pour les espaces de suites dans $\mathbb{K}$ (on rappelle qu'une suite d'éléments de $\mathbb{K}$ est une application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{K}$).

Résolution d'un système d'équations linéaires

Déterminer l'ensemble des $(\lambda_1, ..., \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ solutions de :

$$\lambda_1 \vec{v}_1 + ... + \lambda_n \vec{v}_n = \vec{0}$$

revient à résoudre le système d'équations linéaires à m équations et d'inconnues $\lambda_1, ..., \lambda_n$ suivant :

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} v_1^{(1)}\lambda_1 & + & ... & + & v_n^{(1)}\lambda_n & = & 0 \\ v_1^{(2)}\lambda_1 & + & ... & + & v_n^{(2)}\lambda_n & = & 0 \\ \vdots & & & & & & \\ v_1^{(m)}\lambda_1 & + & ... & + & v_n^{(m)}\lambda_n & = & 0 \end{array} \right. ,$$

en notant, pour tout $i = 1, ..., n$, $\vec{v}_i = (v_i^{(1)}, ..., v_i^{(m)})$.

Voir le rappel de cours sur les systèmes déquations linéaires pour en savoir plus sur de tels systèmes. La méthode de résolution de ces systèmes par le pivot de Gauss est décrite dans l'élément de cours système d'équations linéaires ainsi qu'à la rubrique méthode et techniques Échelonner un système linéaire par la méthode de Gauss .

Retour au début

Échelonnement de la famille de vecteurs

L'idée est d'utiliser la méthode du pivot de Gauss sur les vecteurs de manière à se ramener à une famille échelonnée de vecteurs. Ce paragraphe comporte quatre points :

(a) Description des opérations autorisées sur les familles de vecteurs
(b) Familles échelonnées de vecteurs
(c) Échelonnement de la famille par la méthode du pivot de Gauss : théorie (algorithme)
(d) Échelonnement de la famille par la méthode du pivot de Gauss : pratique (sur des exemples)

Retour au début

Opérations autorisées

Les opérations suivantes sur les familles de vecteurs n'ont pas d'incidence sur le caractère libre ou lié de la famille :

- échanger deux vecteurs de la famille,
- multiplier un vecteur par un scalaire non nul ;
- ajouter à un vecteur une combinaison linéaire d'autres vecteurs de la famille **que l'on ne modifie pas en même temps**.

Ces opérations ont de plus la vertu de ne pas modifier le sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^m$ engendré par la famille de vecteurs.

Retour au début

Familles échelonnées de vecteurs

Une famille de vecteurs $\{\vec{v}_1, ..., \vec{v}_n\}$ de $\mathbb{K}^m$ avec, pour tout $i = 1, ..., n$:

$$\vec{v}_j = \begin{pmatrix} v_j^{(1)} \\ \vdots \\ v_j^{(m)} \end{pmatrix}$$

est dite échelonnée si il existe une suite strictement croissante d'entiers naturels $1 \leq n_1 < n_2 < ... < n_m$ telle que :

$$\forall j = 1, ..., n, \quad v_j^{(n_j)} \neq 0$$

et

$$\forall j = 1, ..., n, \forall i = 1, ..., n_j - 1 \quad v_j^{(i)} = 0.$$

Par exemple, la famille de vecteurs suivante du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ est échelonnée :

$$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \right)$$

avec $n_1 = 1$, $n_2 = 2$ et $n_3 = 3$.

La famille de vecteurs suivante du $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathbb{C}^4$ est échelonnée :

$$\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2i \\ 1+3i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2(1+i) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

avec $n_1 = 2$, $n_2 = 4$ et $n_3 = 5$.

Il est facile de voir qu'une famille échelonnée de vecteurs de $\mathbb{K}^m$ est libre si et seulement si elle ne contient pas de vecteurs nuls. Ainsi la famille de $\mathbb{R}^3$ donnée en exemple est libre et celle de $\mathbb{C}^4$ donnée en exemple est liée.

Retour au début

Échelonnement d'une famille de vecteurs par la méthode du pivot de Gauss : théorie

La méthode que nous décrivons permet de se ramener à une famille échelonnée de vecteurs en, au plus, n étapes (où n est le nombre de vecteurs de la famille initiale). À l'issue de l'étape k, la famille de vecteurs obtenue a la forme $(\mathcal{H}_k)$ suivante :

$$\left(\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ v_1^{(n_1)} \\ \vdots \\ v_1^{(m)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ v_2^{(n_2)} \\ \vdots \\ v_2^{(m)} \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ v_k^{(n_k)} \\ \vdots \\ v_k^{(m)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ v_{k+1}^{(n_k+1)} \\ \vdots \\ v_{k+1}^{(m)} \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ v_n^{(n_k+1)} \\ \vdots \\ v_n^{(m)} \end{pmatrix}\right),$$

avec $1 \leq n_1 < n_2 < ... < n_k$ et $v_1^{(n_1)} \neq 0$,..., $v_k^{(n_k)} \neq 0$.

Décrivons l'étape k de la méthode :

Étant donné une famille de la forme $\mathcal{H}_{k-1}$, nous allons la modifier de sorte à obtenir une famille de la forme $\mathcal{H}_k$ en n'utilisant que des opérations autorisées.

Nous noterons $\vec{v}_j$ le $j^{ème}$ vecteur de la famille.

- On ne modifie pas les $k-1$ premiers vecteurs de la famille.
- Si toutes les coordonnées $v_l^{(m)}$ (avec $l \geq k$ et $m > n_{k-1}$) sont nuls, alors, pour tout $l \geq k$, le vecteur $\vec{v}_l$ est nul. La famille a donc la forme voulue. L'algorithme s'arrête.
- Sinon, on pose $n_k := \min\{m \ : \ \exists l \geq k \ : \ v_l^{(m)} \neq 0\}$. Alors, quitte à échanger le vecteur $\vec{v}_k$ avec un vecteur $\vec{v}_p$ avec $p \geq k$ (tel que $v_p^{(n_k)} \neq 0$), on se ramène au cas où v_{k,n_k} est non nul (ce sera notre pivot pour l'étape k).
- Pour tout $p > k$, on remplace $\vec{v}_p$ par $\vec{v}_p - \frac{v_{p,n_k}}{v_{k,n_k}}\vec{v}_k$ (afin d'éliminer les $(n_k)^{ème}$ coordonnées x_{n_k} des vecteurs $\vec{v}k+1, ..., vecv_m$.
- La famille de vecteurs ainsi obtenue est alors de la forme $\mathcal{H}_k$, l'étape k est finie.

Retour au début

Illustration de la méthode sur deux exemples

- Un exemple où la famille est libre
- Un exemple où la famille est liée par deux relations linéaires indépendantes

Retour au début

Un exemple où la famille est libre

On considère les trois vecteurs suivants de $\mathbb{C}^4$:

$$\vec{v}_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \ \vec{v}_2 := \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix} \text{ et } \vec{v}_3 := \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ i \\ 4 \end{pmatrix}.$$

On souhaite savoir si la famille $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$ de $\mathbb{C}^4$ est libre ou liée et, si elle est liée, déterminer les relations linéaires existant entre les trois vecteurs.

Les familles de vecteurs suivantes sont libres ou liées simultanément :

$$\left(\begin{array}{ccc} \vec{v}_1 & \vec{v}_2 & \vec{v}_3 \\ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ i \\ 4 \end{pmatrix} \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc} \vec{v}_1 & \vec{v}'_2 := \vec{v}_2 - 2\vec{v}_1 & \vec{v}'_3 := \vec{v}_3 - 3\vec{v}_1 \\ \begin{pmatrix} \boxed{1} \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ i-9 \\ -8 \end{pmatrix} \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc} \vec{v}_1 & \vec{v}''_2 := \vec{v}'_3 & \vec{v}''_3 := \vec{v}'_2 \\ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ i-9 \\ -8 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \end{array} \right)$$

Cette dernière famille de vecteurs de $\mathbb{C}^4$ est échelonnée et libre (car elle ne contient pas de vecteur nul). Ainsi $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$ est une famille libre de $\mathbb{C}^4$.

Retour au début

Un exemple où la famille est liée par deux relations linéaires indépendantes

On considère les quatre vecteurs suivants de $\mathbb{R}^4$:

$$\vec{v}_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \ \vec{v}_2 := \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \ \vec{v}_3 := \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} \text{ et } \vec{v}_4 := \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

On souhaite savoir si la famille $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4)$ de $\mathbb{R}^4$ est libre ou liée et, si elle est liée, dt́erminer les relations linéaires existant entre les quatre vecteurs.

Les familles de vecteurs suivantes sont libres ou liées simultanément :

$$\left(\begin{array}{cccc} \vec{v}_1 & \vec{v}_2 & \vec{v}_3 & \vec{v}_4 \\ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{cccc} \vec{v}_1 & \vec{v}'_2 := \vec{v}_2 - \vec{v}_1 & \vec{v}'_3 := \vec{v}_3 - 2\vec{v}_1 & \vec{v}'_4 := \vec{v}_4 + \vec{v}_1 \\ \begin{pmatrix} \boxed{1} \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{cccc} \vec{v}_1 & \vec{v}'_2 & \vec{v}"_3 := \vec{v}'_3 - \vec{v}'_2 & \vec{v}"_4 := \vec{v}'_4 + 2\vec{v}'_2 \\ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 \\ \boxed{\text{-1}} \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{array} \right).$$

Cette dernière famille de vecteurs de $\mathbb{R}^4$ est échelonnée et liée (car elle contient des vecteurs nuls). Ainsi $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4)$ est une famille liée de $\mathbb{R}^4$. De plus, on a :

$$\vec{0} = \vec{v}"_3 = \vec{v}'_3 - \vec{v}'_2 = (\vec{v}_3 - 2\vec{v}_1) - (\vec{v}_2 - \vec{v}_1) = \vec{v}_3 - \vec{v}_2 - \vec{v}_1$$

et

$$\vec{0} = \vec{v}"_4 = \vec{v}'_4 + 2\vec{v}'_2 = (\vec{v}_4 + \vec{v}_1) + 2(\vec{v}_2 - \vec{v}_1) = \vec{v}_4 - 2\vec{v}_2 - \vec{v}_1.$$

Ainsi, on a les relations linéaires suivantes :

$$\vec{v}_3 - \vec{v}_2 - \vec{v}_1 = \vec{0}$$

et

$$\vec{v}_4 - 2\vec{v}_2 - \vec{v}_1 = \vec{0}.$$

De plus, les relations linéaires liant $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, $\vec{v}_3$ et $\vec{v}_4$ sont les relations s'écrivant comme une combinaison lináire de ces deux relations, c'est-à-dire que ce sont les relations de la forme :

$$a(\vec{v}_3 - \vec{v}_2 - \vec{v}_1) + b(\vec{v}_4 - 2\vec{v}_2 - \vec{v}_1) = \vec{0},$$

avec $a, b \in \mathbb{R}$. Autrement dit, les relations linéaires liant $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, $\vec{v}_3$ et $\vec{v}_4$ sont les relations de la forme :

$$b\vec{v}_4 + a\vec{v}_3 + (-a - 2b)\vec{v}_2 + (-a - b)\vec{v}_1 = \vec{0},$$

avec a et b deux réels quelconques.

Remarque : si on souhaite simplement prouver que le système de vecteurs est lié, il n'est pas nécessaire de déterminer ,toutes les relations linéaires existant entre les vecteurs du système : il suffit de trouver une relation linéaire non nulle ; par exemple, ici, il suffisait de remarquer que $\vec{v}_3 = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$ ce qui nous donne directement : $\vec{v}_3 - \vec{v}_2 - \vec{v}_1 = \vec{0}$ et nous assure que le système $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4)$ est lié.

Retour au début