Elément de cours des exercices

Familles génératrices.

1. Définition.

1. Définition. *Soit E un K-espace vectoriel et $(u_1, \ldots, u_p)$ une famille de vecteurs de E.*
La famille $(u_1, \ldots, u_p)$ est une famille génératrice de E si tout vecteur de E est une combinaison linéaire des vecteurs $u_1, \ldots, u_p$, c'est-à-dire si pour tout vecteur $u \in E$, il existe $(\lambda_1, \ldots \lambda_p) \in K^p$ tel que $u = \lambda_1 u_1 + \ldots + \lambda_p u_p$.

Exemple. Soit $P = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x + y + z = 0\}$. On a $P = \{x(1, 0, -1) + y(0, 1, -1) \,|\, (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$, donc $u = (1, 0, -1)$ et $v = (0, 1, -1)$ sont des vecteurs de P et tout vecteur de P est une combinaison linéaire de ces deux vecteurs. La famille (u, v) est une famille génératrice de P.

Généralisation. Une famille $(u_i)_{i\in I}$ de vecteurs de E indexée par un ensemble I infini est une famille génératrice de E si tout vecteur de E est combinaison linéaire d'une sous-famille finie de (u_i). Par exemple, la famille des monômes $(X^i)_{i\in\mathbb{N}}$ est une famille génératrice de $\mathbb{R}[X]$.

Retour au début

1. Familles génératrices et bases.

Définition. Une base de E est une famille de E qui est génératrice et libre.

Exemple. La famille (u_1, u_2, u_3) des trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$ donnés par $u_1 = (1, 0, 0), u_2 = (0, 1, 0), u_3 = (0, 0, 1)$ est une famille génératrice de $\mathbb{R}^3$. C'est même une base, dite base canonique de $\mathbb{R}^3$.

Retour au début

3. Familles génératrices et applications linéaires.

Proposition. *Soit $f : E \to F$ une application linéaire et $(u_1, \ldots, u_p)$ une famille génératrice de E.*
La famille $(f(u_1), \ldots, f(u_p))$ est une famille génératrice de l'image $Im(f)$.
Remarques.

1. Cet énoncé s'applique souvent quand $(u_1, \ldots, u_p)$ est une base de E. (Attention, la famille $(f(u_1), \ldots, f(u_p))$ n'est pas forcément pour autant une base de F.)

2. Il se généralise au cas d'un espace vectoriel E qui n'est pas de dimension finie, comme par exemple $\mathbb{R}[X]$.

Retour au début

4. Familles génératrices en dimension finie.

En dimension finie, le théorème de la base incomplète donne les résultats suivants, qui permettent souvent de décider si une famille est génératrice, plus facilement qu'à partir de la définition :

Théorème 1. *Soit E un espace vectoriel de dimension finie de dimension finie, dim $E = n$.*
Si $(u_1, \ldots, u_p)$ est une famille génératrice de E, on a $n \leq p$.

Théorème 2. *Soit E un espace vectoriel de dimension finie, dim $E = n$.*

1. *Une famille de n vecteurs qui engendre E est une base de E.*
2. *Une famille libre de n vecteurs de E est une base de E.*

Corollaire. *Soit E un espace vectoriel de dimension finie, dim $E = n$ et $(u_1, \ldots, u_p)$ une famille de vecteurs de E.*
Les trois énoncés suivants sont équivalents :

1. *la famille $(u_1, \ldots, u_p)$ est une famille génératrice de E et $p = n$;*
2. *la famille $(u_1, \ldots, u_p)$ est une base de E ;*
3. *la famille $(u_1, \ldots, u_p)$ est une famille libre et $p = n$.*

Retour au début