Elément de cours des exercices

Les espaces de matrices

Soit $\mathbb{K}$ le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Une matrice à p lignes et n colonnes à coefficients dans $\mathbb{K}$ est une famille $A = (a_{i,j})_{1\leq i\leq p, 1\leq j\leq n}$ d'éléments de $\mathbb{K}$. L'ensemble de ces matrices est noté $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$. Si $n = p$, on le note $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
On définit sur l'ensemble $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ une loi appelée *addition des matrices* par : si $A = (a_{i,j})_{1\leq i\leq p, 1\leq j\leq n}$ et $B = (b_{i,j})_{1\leq i\leq p, 1\leq j\leq n}$, alors

$$A + B = (a_{i,j} + b_{i,j})_{1\leq i\leq p, 1\leq j\leq n}.$$

On définit également une loi appelée *multiplication par un scalaire* par

$$\lambda\, A = (\lambda\, a_{i,j})_{1\leq i\leq p, 1\leq j\leq n}.$$

Muni de ces deux lois, cet ensemble est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.
La matrice nulle est la matrice dont tous les éléments sont nuls. Par exemple, la matrice nulle de $\mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{K})$ est la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
$\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ est de dimension $p \times n$. Une base est constituée par les pn matrices $E_{i,j}$ avec $1 \leq i \leq p$ et $1 \leq j \leq n$ définies comme ayant tous leurs termes nuls sauf celui situé à la i-ème ligne et j-ème colonne qui vaut 1.
Par exemple, une base de $\mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{K})$ est $(E_{1,1}, E_{1,2}, E_{1,3}, E_{2,1}, E_{2,2}, E_{2,3})$ avec

$$E_{1,1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ E_{1,2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ E_{1,3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$E_{2,1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ E_{2,2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},\ E_{2,3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

L'ensemble $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{C})$ est également un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$; dans ce cas, il est de dimension $2np$. Une base est donnée par les $2pn$ matrices $E_{k,l}$ pour $1 \leq k \leq p$ et $1 \leq l \leq n$ et $i \times E_{k,l}$ pour $1 \leq k \leq p$ et $1 \leq l \leq n$.
Un certain nombre de sous-ensembles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ en sont des sous-espaces vectoriels ;

- l'ensemble des matrices symétriques, il est de dimension $\dfrac{n(n+1)}{2}$;
- l'ensemble des matrices antisymétriques, il est de dimension $\dfrac{n(n-1)}{2}$;
- l'ensemble des matrices triangulaires supérieures (respectivement inférieures), il est de dimension $\dfrac{n(n+1)}{2}$.

Retour à la liste