Elément de cours des exercices

$\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{C}^n$: des espaces de $n-$uplets

On note $\mathbb{K}$ l'ensemble des réels ou des complexes. Si $n \geq 1$ est un entier, on désigne par $\mathbb{K}^n$ le produit cartésien $\underbrace{\mathbb{K} \times \cdots \times \mathbb{K}}_{n \text{ facteurs}}$.
$\mathbb{K}^n$ est donc l'ensemble des $n-$uplets ordonnés $(x_1, \ldots, x_n)$ d'éléments de $\mathbb{K}$.

On définit, sur $\mathbb{K}^n$, deux lois appelées *addition* et *multiplication par un scalaire* :

$$\begin{array}{l} + \left\{ \begin{array}{ll} \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n & \longrightarrow \mathbb{K}^n \\ (x, y) & \longmapsto x + y = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n) \end{array} \right. \\ \times \left\{ \begin{array}{ll} \mathbb{K} \times \mathbb{K}^n & \longrightarrow \mathbb{K}^n \\ (\lambda, x) & \longmapsto \lambda\, x = (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n) \end{array} \right. \end{array}$$

On a ainsi construit deux espaces vectoriels $\mathbb{R}^n$ sur $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}^n$ sur $\mathbb{C}$.
Ces espaces sont de dimension n et ont pour base canonique les n vecteurs $(1, 0, 0, \ldots, 0)$, $(0, 1, 0, \ldots, 0), \ldots, (0, 0, 0, \ldots, 1)$. Le vecteur nul est $(0, 0, 0, \ldots, 0)$.
Par exemple, $\mathbb{R}^2$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension 2 dont une base est $\big((1, 0), (0, 1)\big)$.

On peut également définir sur $\mathbb{C}^n$ une loi appelée *multiplication par un réel* :

$$\times \left\{ \begin{array}{ll} \mathbb{R} \times \mathbb{C}^n & \longrightarrow \mathbb{C}^n \\ (\lambda, x) & \longmapsto \lambda\, x = (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n) \end{array} \right.$$

$(\mathbb{C}^n, +, \times)$ est alors un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$; il est de dimension $2n$ et la base canonique de $\mathbb{C}^n$ en tant que $\mathbb{R}$-espace vectoriel est formée des $2n$ vecteurs $(1, 0, 0, \ldots, 0)$, $(0, 1, 0, \ldots, 0), \ldots, (0, 0, 0, \ldots, 1)$, $(i, 0, 0, \ldots, 0)$, $(0, i, 0, \ldots, 0), \ldots, (0, 0, 0, \ldots, i)$.
Par exemple, $\mathbb{C}^2$ est un espace vectoriel $\mathbb{R}$ de dimension 4 dont une base est $\big((1, 0), (0, 1), (i, 0), (0, i)\big)$.

Retour à la liste