Elément de cours des exercices

Les espaces de fonctions

Soit $\mathbb{K}$ le corps des réels ou celui des complexes et F un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$. Si E est un ensemble, on note $\mathcal{F}(E, F)$ l'ensemble des applications de E dans F.
On définit, sur $\mathcal{F}(E, F)$, une loi appelée *addition des applications*

$$+\left\{\begin{array}{ll} \mathcal{F}(E,F)\times\mathcal{F}(E,F) & \longrightarrow \mathcal{F}(E,F) \\ (f,g) & \longmapsto f+g \end{array}\right.$$

où $f+g$ est l'application définie par $(f+g)(x) = f(x)+g(x)$ pour tout $x \in E$,
et une loi appelée *multiplication par un scalaire* :

$$\times\left\{\begin{array}{ll} \mathbb{K}\times\mathcal{F}(E,F) & \longrightarrow \mathcal{F}(E,F) \\ (\lambda,f) & \longmapsto \lambda\, f \end{array}\right.$$

où $\lambda\, f$ est l'application définie par $(\lambda\, f)(x) = \lambda\, f(x)$ pour tout x dans E.
Muni de ces deux lois, l'ensemble $\mathcal{F}(E, F)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$. Il est de dimension infinie.
Le vecteur nul de $\mathcal{F}(E, F)$ est l'application nulle définie comme étant l'application qui, à tout x de E, associe le vecteur nul de l'espace vectoriel F.
Outre les applications réelles qui sont considérées dans le paragraphe suivant, citons quelques exemples à connaître :

- si E est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$, l'ensemble des applications linéaires de E dans F, noté $\mathcal{L}(E, F)$. Si $E = F$, on le note $\mathcal{L}(E)$. Si E et F sont de dimension finie, alors $\dim(\mathcal{L}(E, F)) = \dim(E)\, \dim(F)$;
- si E est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$, l'ensemble des automorphismes de E noté $\mathcal{GL}(E)$ et appelé groupe linéaire de E. C'est aussi un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$.

Retour à la liste