Elément de cours des exercices

Base dans un espace vectoriel de dimension finie.

1. Définitions.
2. Pour répondre à la question : "$\mathcal{F}$ est-elle une base de E espace vectoriel de dimension finie ? "
3. Voir aussi : Base.

Définition : Soit $\mathcal{F}$ une famille de vecteurs d'un espace vectoriel E. Dire que $\mathcal{F}$ est une base de E signifie que $\mathcal{F}$ est une famille libre et génératrice de E.

Définition : Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. E est de dimension finie signifie que E admet une famille génératrice finie.

Théorème : Toutes les bases d'un espace vectoriel de dimension finie ont même cardinal n. n est appelé la dimension de E.

Théorème : Soit E un espace vectoriel de dimension n et soit $\mathcal{F}$ une famille finie de vecteurs de E. Les propositions sont équivalentes :

1. $\mathcal{F}$ est une base de E.
2. $\mathcal{F}$ est une famille libre et génératrice de E.
3. $\mathcal{F}$ est une famille libre de E et le cardinal de $\mathcal{F}$ est égal à n.
4. $\mathcal{F}$ est une famille génératrice de E et le cardinal de $\mathcal{F}$ est égal à n.

Retour

Pour répondre à la question : "$\mathcal{F}$ est-elle une base de E espace vectoriel de dimension finie ? " :

1. si $\mathcal{F}$ n'est pas une famille libre par exemple si l'on "voit " une relation linéaire liant les vecteurs de $\mathcal{F}$ on peut tout de suite dire que $\mathcal{F}$ n'est pas une base de E.
2. Quand on connaît la dimension de l'espace E,
   (a) si le cardinal de $\mathcal{F}$ n'est pas égal à la dimension de l'espace E on peut tout de suite dire que $\mathcal{F}$ n'est pas une base de E.
   (b) si le cardinal de $\mathcal{F}$ est égal à la dimension de l'espace E, le plus souvent on vérifie simplement que la famille $\mathcal{F}$ est une famille libre pour conclure qu'elle forme une base de E.
   (c) si le cardinal de $\mathcal{F}$ est égal à la dimension de l'espace E, il arrive parfois que l'on montre que la famille $\mathcal{F}$ est génératrice .
   Par exemple soit :
   $$\mathcal{F} = \{P_0(X), P_1(X), P_2(X), \dots, P_n(X)\}$$
   une famille de polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$ tel que pour tous $i \in \{0, 1, \dots, n\}$, $P_i(X)$ est unitaire et de degré i.
   On montre par récurrence pour tous $i \in \{0, 1, \dots, n\}$ que :
   $$\mathrm{Vect}\left(1, X, \dots, X^i\right) = \mathrm{Vect}\left(P_0(X), P_1(X), \dots, P_i(X)\right)$$
   On a donc
   $$\mathrm{Vect}\left(P_0(X), P_1(X), \dots, P_n(X)\right) = \mathrm{Vect}\left(1, X, \dots, X^n\right) = \mathbb{R}_n[X]$$
   Donc $\mathcal{F}$ est une famille génératrice de $\mathbb{R}_n[X]$ de cardinal $n+1$. Or la dimension de $\mathbb{R}_n[X]$ est égale à $n+1$. Donc $\mathcal{F}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

Retour