Méthodes et techniques des exercices

Tester si une application linéaire est surjective

Définition : Une application d'un ensemble E vers un ensemble F est dite surjective si tout élément de F est l'image par f d'au moins un élément de E.

1. Pour les applications linéaires, sans utiliser de base
   Suivant les contextes, on va savoir grâce à un théorème particulier qu'une application est bijective, et utiliser ce résultat plus puissant pour en déduire que cette application est en particulier surjective. C'est le cas quand on considère des applications linéaires d'un espace de dimension n dans un espace de même dimension. Dans un tel cas, dès qu'une application linéaire est injective, c'est à dire dès que son noyau est réduit au vecteur nul, elle est bijective. Attention ! Ce résultat est faux en dimension infinie.
   En particulier dans un espace vectoriel de dimension finie, tester qu'un endomorphisme est surjectif revient à tester si son noyau est nul.
   Plus généralement, tester qu'une application linéaire d'un espace vectoriel de dimension n dans un espace vectoriel de dimension p, avec $n \geq p$ est surjective revient à tester que la dimension de son noyau est $(n-p)$. Et si on a $n \leq p$, il n'existe pas d'application linéaire surjective de E de dimension n dans F de dimension p. (Théorème du rang).
2. Pour les applications linéaires, si on peut utiliser les bases
   Pour savoir si une application linéaire f allant d'un espace E dont on connaît une base B vers un espace F est surjective, il suffit de déterminer si l'image par f de B est une famille génératrice de F.
3. Emploi de la définition
   On se pose alors une question du type : soit v quelconque dans l'ensemble d'arrivée, peut-on trouver un u de l'ensemble de départ tel que v s'écrive $f(u)$? En général on s'est fait une idée a priori.
   - Si on veut montrer que f n'est pas surjective, on cherche un contre-exemple, c'est à dire un v qui ne pourra jamais s'écrire $f(u)$.
   - Si on veut montrer que f est surjective, on cherche un u qui va nous permettre d'arriver sur v.
     Par exemple, pour montrer que l'application f de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ qui à $u = (x, y, z)$ associe $f(u) = (x-y, x-z)$ est surjective, on choisit un vecteur $v = (r, s)$ arbitraire. Et on observe que $v = f(u)$, avec $u = (r, 0, r-s)$, par exemple.