

Méthodes et techniques des exercices

Exploitation de formulations intégrales dans l'étude d'équa diff

Beaucoup de résultats sur les équations différentielles s'obtiennent non pas en raisonnant sur l'équation elle-même mais sur une forme intégrale qui traduit ou découle de cette équation. Cette idée est mise en oeuvre dans quatre méthodes :

Pour les équations linéaires du premier ordre $y' = a(x)y + b(x)$

Pour les équations linéaires du second ordre à coefficients constants $ay'' + by' + cy = f(x)$

Pour les équations du premier ordre $y' = f(x, y)$

Pour certaines équations du second ordre $y'' = f(x, y, y')$

Equations linéaires du premier ordre

Pour les équations linéaires du premier ordre

$$y' = a(x)y + b(x)$$

avec a et b continues sur un intervalle ouvert I , la méthode de variation de la constante permet, en désignant par $A(x)$ une primitive de $a(x)$ sur I , d'écrire les solutions sur I :

$$y(x) = Ce^{A(x)} + \int_{x_0}^x b(t)e^{-A(t)} dt, \quad C \in \mathbb{R}$$

Quand ces primitives ne sont pas calculables il est parfois possible d'obtenir des propriétés de y à partir de cette expression (majoration, limites, ...).

Equations linéaires du second ordre à coefficients constants

Pour les équations linéaires du second ordre à coefficients constants

$$ay'' + by' + cy = f(x)$$

les méthodes de variation des constantes fournissent, comme dans le cas précédent, des expressions de $y(x)$ à l'aide d'intégrales qui permettent parfois d'obtenir des propriétés de y sans calculer ces intégrales.

Equations du premier ordre $y' = f(x, y)$

Pour les équations du premier ordre

$$y' = f(x, y)$$

où f est une fonction continue, on remplace la recherche de solutions vérifiant la condition de Cauchy $y(x_0) = y_0$ par la recherche de solutions de l'équation intégrale équivalente

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt$$

Cette formulation est le point de départ de la démonstration du Théorème de Cauchy-Lipschitz.

Elle permet aussi, éventuellement en utilisant le Lemme de Gronwall, d'obtenir des propriétés de la solution y quand on ne sait pas la calculer explicitement.

Equations du second ordre $y'' = f(x, y, y')$

Dans certains cas, une équation différentielle

$$(E) \quad y'' = f(x, y, y')$$

conduit, après calcul algébrique, à une autre équation différentielle dont la forme intégrale peut permettre d'obtenir des propriétés des solutions de E quand on ne sait pas les calculer explicitement.

EXEMPLE. Soit l'équation différentielle

$$(E) \quad 2y'' + 4y^3 = 0$$

On multiplie par y' et on intègre sur $[x_0, x]$ où x_0 est un réel fixé dans l'intervalle de définition de la solution considérée y ; on obtient

$$(y')^2 + y^4 = y'(x_0)^2 + y(x_0)^4.$$

De l'identité précédente, on peut conclure que toute solution de (E) est bornée.

Attention : Ici nous obtenons une formulation intégrale qui n'est pas équivalente à l'équation différentielle de départ.